

ARY QUINTELLA

(Professor Catedrático do Colégio Militar)

*Amami Mideia
Cavalcant*

MATEMÁTICA

para o

PRIMEIRO ANO COLEGIAL

Com:

I — 746 exercícios incluindo várias questões propostas nos Concursos de Habilitação das Escolas de Engenharia, Arquitetura, Filosofia e Química das Universidades do Brasil, Católica, da Guanabara, de São Paulo, de Minas Gerais, do Paraná e do Estado do Rio.
II — Uma tábua de logaritmos a 4 decimais, fora do texto:

19.^a edição

Exemplar N^o 12538

COMPANHIA EDITORA NACIONAL
SÃO PAULO

DO AUTOR

Curso Ginásial:

- 1) *Matemática*, Primeira Série Ginásial.
- 2) *Matemática*, Segunda Série Ginásial.
- 3) *Matemática*, Terceira Série Ginásial.
- 4) *Matemática*, Quarta Série Ginásial.

Curso Colegial:

- 5) *Segundo Ano*.
- 6) *Terceiro Ano*.

Curso Comercial Básico: [(exgotados).

- 7) *Aritmética Prática*, Primeiro Ano.
- 8) *Matemática*, Segundo Ano.
- 9) *Álgebra Elementar*, Terceiro Ano.

Coleção Madureza (Art. 91)

- 10) *Guia de Matemática*.

Curso Primário e Admissão:

(Em colaboração com o prof. Newton O'Reilly):

- 11) *Exercícios de Aritmética*, Admissão e Quinta Série Primária.

Concursos de Habilitação:

(Em colaboração com o prof. Vitalino Alves):

- 12) *Questões de Concurso nas Escolas Superiores*.

Curso Normal:

(Em colaboração com o prof. Francisco Junqueira).

- 13) *Exercícios de Matemática* (Conquista).

★

EDIÇÕES DA
COMPANHIA EDITORA NACIONAL
Rua dos Gusmões, 639 - São Paulo 2, SP

ÍNDICE GERAL

UNIDADE I: Progressões

I) Progressões aritméticas

1. Definições.....	15
2. Notações.....	16
3. Diversos tipos de progressão.....	17
4. Termo geral.....	18
5. Fórmula do termo geral.....	18
6. Problemas.....	19
7. Propriedades das progressões.....	20
8. Soma dos termos.....	22
9. Problemas.....	23
10. Interpolação.....	24

II) Progressões geométricas

11. Definições.....	25
12. Notação.....	26
13. Diversos tipos de progressão.....	26
14. Termo geral.....	27
15. Fórmula do termo geral.....	28
16. Problemas.....	29
17. Propriedades das progressões.....	32
18. Produto dos termos.....	33
19. Soma dos termos.....	34
20. Problemas.....	37
21. Interpolação.....	38

UNIDADE II: Logaritmos. Equações exponenciais

I) Conceito. Propriedades gerais

1. Definições.....	47
2. Sistemas de logaritmos..	49
3. Variação dos logaritmos.	50
4. Propriedades operatórias	51
5. Característica e mantissa	53
6. Cologaritmo.....	53
7. Regra para o cálculo do logaritmo de um monômio.....	54

II) Logaritmos decimais

8. Propriedades.....	55
9. Logaritmo preparado....	58
10. Regra para achar o cologarítimo.....	59

11. Operações com logaritmos	60
12. Tábuas de logaritmos...	63
13. Achar o logaritmo de um número.....	63
14. Achar o antilogaritmo...	65
15. Cálculo de expressões...	66
16. Mudança de base.....	67

III) Equações exponenciais

17. Definição.....	72
18. Resolução da equação $a^x = b$.	72
19. Exponencial de segunda ordem.....	74
20. Equação $a\alpha^{2x} + b\alpha^x + c = 0$	74
21. Equação $a^{x+1} - a^{3-x} = b$	75
22. Índices incógnitos.....	75

UNIDADE III: Retas e planos; superfícies e poliedros em geral; corpos redondos usuais; definições e propriedades; áreas e volumes.

CAPÍTULO I: RETA E PLANO. DIEDROS

I) Reta e plano		IV) Diedros. Planos perpendiculares	
1. Plano.....	79	14. Definições.....	99
2. Postulados do plano....	79	15. Soma de diedros.....	100
3. Determinação do plano..	80	16. Propriedades dos diedros	101
4. Posições relativas de duas retas.....	81	17. Aplicações.....	102
5. Posições relativas de uma reta e um plano.....	82	18. Planos perpendiculares..	104
6. Posições relativas de dois planos.....	82	19. Teoremas.....	104
		20. Projeções.....	107
		21. Ângulo de reta e plano	108
		22. Distância de duas retas	108
II) Paralelismo de retas e planos		V) Ângulos sólidos. Triedros	
7. Retas paralelas.....	83	23. Definições.....	109
8. Reta e planos paralelos..	85	24. Triedros.....	110
9. Planos paralelos.....	87	25. Triedros simétricos e suplementares.....	111
10. Ângulo de duas retas... 91		26. Propriedades dos ângulos sólidos.....	112
III) Reta e plano perpendiculares		27. Aplicação.....	115
11. Definições.....	92	28. Congruência de triedros	116
12. Teoremas.....	92		
13. Aplicações.....	98		

CAPÍTULO II: POLIEDROS

I) Generalidades		II) Poliedros regulares	
1. Definições.....	123	4. Teorema fundamental....	127
2. Classificação.....	123	5. Elementos dos poliedros regulares.....	129
3. Propriedades — Teorema de Euler.....	124	6. Área dos poliedros regulares	130
		7. Poliedros conjugados....	131

CAPÍTULO III: PRISMAS

1. Superfície prismática....	133	9. Propriedades dos paralelepípedos.....	135
2. Propriedade.....	133	10. Propriedade do paralelepípedo retângulo.....	136
3. Secção reta.....	134	11. Área dos prismas.....	137
4. Prisma.....	134	12. Volume dos prismas....	138
5. Elementos dos prismas..	134		
6. Classificação dos prismas	134		
7. Paralelepípedos.....	134		
8. Congruência dos prismas	135		

CAPÍTULO IV: PIRÂMIDES; TRONCOS

I) Pirâmide		II) Troncos	
1. Definições.....	151	9. Tronco de pirâmide.....	161
2. Elementos da pirâmide..	151	10. Área lateral do tronco de pirâmide.....	162
3. Classificação.....	152	11. Área total do tronco de pirâmide.....	162
4. Pirâmide regular. Relações métricas.....	152	12. Volume do tronco de pirâmide.....	162
5. Propriedades.....	153	13. Troncos de prisma.....	165
6. Áreas.....	155	14. Área lateral do tronco de prisma.....	165
7. Volume.....	156	15. Área total.....	166
8. Aplicações.....	160	16. Volume do tronco de prisma	166

CAPÍTULO V: SUPERFÍCIES

1. Linha.....	175	5. Superfícies retilíneas....	177
2. Superfície.....	175	6. Superfícies de revolução	178
3. Família de superfícies... 176		7. Exemplos de superfícies de revolução.....	179
4. Classificação das superfícies.....	176		

CAPÍTULO VI: CILINDRO

1. Definições.....	181	7. Cilindros semelhantes... 183	
2. Propriedades do cilindro	182	8. Relações entre as áreas e os volumes dos cilindros semelhantes.....	184
3. Área lateral. Área total. Volume.....	182	9. Tronco de cilindro.....	184
4. Secção meridiana.....	183	10. Desenvolvimento da superfície lateral.....	186
5. Cilindro equilátero.....	183		
6. Semi-cilindro.....	183		

CAPÍTULO VII: CONE

1. Definições.....	189	6. Relações entre áreas e volumes de cones semelhantes.....	192
2. Propriedades do cone....	190	7. Troncos de cone.....	193
3. Área lateral. Área total. Volume.....	191	8. Desenvolvimento da superfície lateral.	194
4. Cone equilátero.....	191		
5. Cones semelhantes.....	192		

CAPÍTULO VIII: ESFERA

I) Generalidades

1. Definições..... 199
2. Propriedades..... 199
3. Polos. Distância polar. 203
4. Posições da reta em relação à esfera..... 205
5. Superfície cônica e cone circunscritos..... 206
6. Superfície cilíndrica e cilindro circunscritos.... 206

II) Área da superfície esférica e de suas partes

7. Teorema fundamental.. 207
8. Aplicação: Superfície Gerada por uma poligonal regular..... 210

9. Área da zona esférica.. 211
10. Área da calota..... 212
11. Área da superfície esférica 212
12. Fuso esférico..... 213

III) Volume da esfera e de suas partes

13. Teorema fundamental... 214
14. Aplicação: Volume gerado por um setor poligonal 216
15. Volume do setor esférico 217
16. Volume da esfera..... 218
17. Volume da cunha esférica 219
18. Anel esférico..... 219
19. Segmento esférico..... 220

UNIDADE V: Seções cônicas

I) Elipse

1. Definições..... 229
2. Traçado da elipse..... 230
3. Eixos de simetria. Centro de simetria..... 231
4. Comprimento dos eixos. Vértices..... 233
5. Relações entre os eixos e a distância focal..... 233
6. Excentricidade..... 234
7. O ponto em relação à elipse..... 235
8. Círculos da elipse..... 236
9. Propriedades da elipse.. 237
10. Traçado de tangentes à elipse..... 240

II) Hipérbole

11. Definições..... 241
12. Condição de existência da curva..... 242
13. Traçado da hipérbole... 242
14. O ponto em relação à hipérbole..... 244
15. Eixos de simetria. Centro de simetria. Vértices. 245

16. Comprimento dos eixos. Hipérbole eqüilátera.. 246
17. Relação métrica entre os eixos e a distância focal 246
18. Excentricidade. Variação 246
19. Propriedade da hipérbole 247
20. Tangentes à hipérbole.. 249
21. Traçado de tangentes à hipérbole..... 250
22. Assíntotas..... 251
23. Hipérboles conjugadas... 252

III) Parábola

24. Definições..... 252
25. Traçado da parábola.... 253
26. A parábola como lugar geométrico..... 254
27. Eixo de simetria. Vértice 255
28. Tangentes à parábola... 256
29. Traçado de tangentes à parábola..... 257

IV) Seções cônicas

30. Definições..... 258
31. Teorema de Dandelin... 258

ÍNDICE DOS EXERCÍCIOS

1. Progressões aritméticas e geométricas..... 39
2. Logarítmos..... 54, 69
3. Equações exponenciais..... 76
4. Reta e plano. Diedros. Triedros..... 119
5. Poliedros. Teorema de Euler. Poliedros regulares..... 131
6. Prismas..... 146
7. Pirâmides..... 163
8. Cilindro..... 186
9. Cone..... 195
10. Esfera..... 223
11. Seções cônicas..... 262

MATEMÁTICA

UNIDADE I

Progressões

I) PROGRESSÕES ARITMÉTICAS

1. Definições.

1.ª) *Sucessão é todo conjunto numérico, cujos elementos estão em correspondência biunívoca com os números naturais.* Isto é, conjunto tal que, a cada um de seus elementos corresponde um único número natural e, reciprocamente, a cada número natural corresponde um único elemento do conjunto.

Exemplos.

1.º) As potências de 3;

3, 9, 27, 81, ...

formam uma sucessão, por corresponderem aos números naturais, biunivocamente. Assim, ao termo 27, por exemplo, corresponde o único natural 3 e ao natural 4, por exemplo, corresponde o único elemento 81.

2.º) Os números

1, 2, 3, 5, 8, 13, ...

em que cada elemento, a partir do terceiro, é obtido somando os dois precedentes é uma sucessão.

2.ª) *Progressão aritmética é a sucessão em que a diferença entre cada termo e o precedente é constante.*

A sucessão dos números ímpares,

1, 3, 5, 7, 9 ...

é uma progressão aritmética porque a diferença entre dois termos consecutivos é, sempre, igual a 2.

3.ª) A diferença constante entre cada termo e seu precedente denomina-se *razão* da progressão aritmética.

Exemplos:

1.º) Na progressão aritmética:

3, 8, 13, 18, ...

a razão é 5.

2.º) Na progressão aritmética:

31, 27, 23, ...

a razão é: $27 - 31 = -4$.

OBSERVAÇÕES:

1.ª) Em virtude da definição, conclui-se que, na progressão aritmética, cada termo é a soma do precedente com a razão. Assim, no primeiro exemplo, de razão 5, tem-se:

$$8 = 3 + 5, \quad 13 = 8 + 5, \quad 18 = 13 + 5, \text{ etc.}$$

e na segunda, de razão -4;

$$27 = 31 + (-4), \quad 23 = 27 + (-4), \text{ etc.}$$

2.ª) Para achar a razão basta subtrair de um termo qualquer, o seu precedente.

2. Notações. De um modo geral, representam-se os termos de uma sucessão qualquer por intermédio de uma letra provida de índice, indicando este a ordem do termo na sucessão, como

$$u_1, u_2, u_3, \dots$$

A progressão aritmética representa-se do mesmo modo, separando-se, porém, dois termos consecutivos por um ponto e precedendo o primeiro de dois pontos.

Exemplos:

$$: a_1 . a_2 . a_3 . a_4 . \dots$$

$$: 2 . 4 . 6 . 8 . \dots$$

O símbolo a_n representa, então, o termo de ordem n , isto é, o n ésimo termo.

A razão é representada pela letra r .

De um modo geral, tem-se, pela definição:

$$a_n - a_{n-1} = r \quad \text{ou} \quad a_n = a_{n-1} + r.$$

Exemplos:

$$1.º) a_7 - a_6 = r; \quad 2.º) a_{15} = a_{14} + r.$$

3. Diversos tipos de progressão. Quanto à grandeza relativa dos termos as progressões podem ser:

a) **Crescentes**, quando cada termo é maior que o precedente. Exemplo:

$$: 12 . 18 . 24 . 30 . \dots$$

Neste caso, a razão é positiva, ($r > 0$).

b) **Decrescentes**, quando cada termo é menor que o precedente, como, por exemplo, a progressão

$$: 43 . 38 . 33 . 28 . \dots$$

Neste caso, a razão é negativa, ($r < 0$).

Quanto ao número de termos, as progressões podem ser:

a) **Ilimitadas**, quando todo termo tem conseqüente. Para indicar que a progressão é *ilimitada* emprega-se reticências depois do último termo transcrito:

$$: 2 . 4 . 6 . 8 . \dots$$

b) **Limitadas**, quando se considera um último termo sem conseqüente. Indica-se, colocando um ponto depois do último termo. Assim, a progressão.

$$: 4 . 7 . 10 . 13 . 16 . 19 .$$

é uma progressão limitada de 6 termos.

De um modo geral o último termo de uma progressão limitada é representado pelo símbolo a_n , sendo n o número de termos. Assim, a progressão limitada, geral, de n termos, será:

$$a_1 . a_2 . a_3 : \dots a_n :$$

Exemplos:

1.º) A progressão : $\frac{2}{3} \cdot 2 \cdot 3 \frac{1}{3} \cdot 4 \frac{2}{3}$, é uma progressão crescente, limitada, de 4 termos, cuja razão é

$$2 - \frac{2}{3} = \frac{4}{3} \quad \text{ou} \quad 1 \frac{1}{3}$$

2.º) A progressão : $5 \cdot 1 \cdot -3 \dots$ é uma progressão decrescente, ilimitada, cuja razão é

$$1 - 5 = -4.$$

4. Termo geral. *Termo geral* é a expressão que traduz um termo qualquer, isto é, contém a lei de formação dos termos. Representa-se por a_n , onde aos valores sucessivos 1, 2, 3, ... de n correspondem o 1.º, 2.º, 3.º, etc. termos.

5. Fórmula do termo geral. Nas progressões aritméticas pode-se obter uma fórmula para determinação do termo geral.

Consideremos a progressão qualquer :

$$: a_1 \cdot a_2 \cdot a_3 \dots a_n \dots,$$

onde a_n representa o termo geral.

Por definição, temos as igualdades :

$$\left. \begin{array}{l} a_2 = a_1 + r \\ a_3 = a_2 + r \\ \vdots \\ a_n = a_{n-1} + r \end{array} \right\} n - 1 \text{ igualdades}$$

Nos primeiros membros figuram todos os índices de 2 a n , isto é, só não figura o primeiro e nos segundos figuram os índices de 1 a $n-1$, isto é, só não figura o índice n . Assim, existem $n-1$ igualdades e, somando-as membro a membro, a parcela r figurará $n-1$ vezes e teremos:

$$a_2 + a_3 + \dots + a_n = a_1 + a_2 + \dots + a_{n-1} + (n-1) \cdot r$$

Reduzindo os termos semelhantes comuns aos dois membros que são os de índice de 2 a $n-1$, vem, finalmente, a fórmula:

$$a_n = a_1 + (n-1)r \quad (I)$$

Conclui-se:

Um termo qualquer é igual à soma do primeiro termo com o produto da razão pelo número de termos precedentes.

Exemplos:

1.º) Calcular o décimo sétimo termo da progressão : $4 \cdot 7 \cdot 10 \dots$
Temos : $a_1 = 4$, $r = 3$ e $n = 17$. Aplicando a fórmula (I) vem :

$$a_{17} = 4 + 16 \times 3 = 52$$

2.º) Escrever o termo geral da progressão : $6 \cdot 18 \cdot 30 \dots$
Temos : $a_n = 6 + (n-1) \times 12 = 6 + 12n - 12 = 12n - 6$
O termo geral é $12n - 6$.

6. Problemas decorrentes do termo geral. A fórmula (I) encerra quatro elementos :

$$a_n, a_1, r \text{ e } n$$

Se forem, então, dados três desses elementos, poderemos calcular o quarto, por intermédio de uma equação do primeiro grau de uma incógnita. Assim são quatro os problemas derivados do termo geral.

1.º CÁLCULO DE a_n . É o problema de emprêgo direto da fórmula.

Exemplo :

Achar o vigésimo termo da progressão : $101 \cdot 95 \cdot 89 \dots$
Temos : $a_1 = 101$, $r = 95 - 101 = -6$ e $n = 20$. A fórmula (I) dá :

$$a_{20} = 101 + 19(-6) = 101 - 114 = -13$$

2.º) CÁLCULO DE a_1 .

Exemplo :

Achar o primeiro termo de uma progressão aritmética de razão 3 onde o décimo primeiro termo vale 17,5.

Temos: $r = 3$, $n = 11$ e $a_n = 17,5$. Substituindo os valores na fórmula (I), obtemos a equação do primeiro grau em a_1 :

$$17,5 = a_1 + 10 \times 3$$

donde resulta: $a_1 = 17,5 - 30 = -12,5$

3.º) CÁLCULO DE r .

Exemplo:

Achar a razão de uma progressão aritmética, cujo primeiro termo é -37 e o décimo sétimo é 11 .

Temos: $a_1 = -37$, $n = 17$ e $a_n = 11$. Substituindo em (I) obtemos a equação:

$$11 = -37 + 16 \cdot r$$

donde:

$$r = \frac{37 + 11}{16} = 3$$

4.º) CÁLCULO DE n .

Exemplo:

Numa progressão cujo primeiro termo é 3 e a razão, 2 , qual o termo que vale 75 ?

Temos: $a_1 = 3$, $r = 2$ e $a_n = 75$. A fórmula (I) dá a equação em n :

$$75 = 3 + (n - 1) \times 2.$$

donde:

$$n - 1 = \frac{75 - 3}{2} = 36 \quad \text{e} \quad n = 37.$$

7. Propriedades das progressões aritméticas.

1.ª)

Em qualquer progressão aritmética, cada termo é média aritmética entre o antecedente e o conseqüente.

Demonstração.

Consideremos os três termos consecutivos, a_{h-1} , a_h e a_{h+1} , da progressão geral

$$: a_1 . a_2 . a_3 \dots a_{h-1} . a_h . a_{h+1} \dots$$

Teremos, por definição de progressão aritmética:

$$a_h - a_{h-1} = r$$

e

$$a_{h+1} - a_h = r.$$

Donde, igualando os valores de r :

$$a_h - a_{h-1} = a_{h+1} - a_h$$

Transpondo os termos negativos, resulta:

$$2a_h = a_{h-1} + a_{h+1}$$

donde, finalmente:

$$a_h = \frac{a_{h-1} + a_{h+1}}{2}$$

relação que traduz a propriedade.

2.ª)

Em toda progressão aritmética limitada a soma de dois termos equidistantes dos extremos é igual à soma dos extremos.

Demonstração.

Seja a progressão limitada de razão r :

$$: \underbrace{a . b . c . \dots}_{p} \quad T \dots \quad T' \dots \underbrace{j . k . l}_{p}$$

onde, T e T' são dois termos equidistantes dos extremos. Isto é, admitamos que T tenha p antecedentes e T' , p conseqüentes. De acordo com a fórmula do termo geral, teremos:

$$T = a + pr \quad (1)$$

Considerando a progressão parcial a partir do termo T' , teremos análogamente:

$$l = T' + pr \quad (2)$$

Subtraindo, membro a membro, as igualdades (1) e (2), vem:

$$T - l = a - T'$$

donde, transpondo os termos negativos:

$$T + T' = a + l$$

o que demonstra a propriedade.

OBSERVAÇÃO. Se a progressão tiver número ímpar de termos, o termo do meio será igual à média aritmética dos extremos.

Suponhamos seja m o termo do meio da progressão

$$: a . b . c . \dots T . m . T' \dots j . k . l .$$

Em virtude da primeira propriedade, teremos:

$$m = \frac{T + T'}{2}$$

E, como T e T' são eqüidistantes dos extremos em consequência da hipótese, teremos pela segunda propriedade:

$$T + T' = a + l, \text{ logo:}$$

$$m = \frac{a + l}{2}$$

8. Soma dos termos. A soma dos termos da progressão aritmética limitada de n termos

$$: a_1 . a_2 . a_3 \dots a_{n-2} . a_{n-1} . a_n$$

é dada pela fórmula:

$$S = \frac{(a_1 + a_n)n}{2} \quad (\text{II})$$

Demonstração.

A soma dos termos da progressão dada é

$$S = a_1 + a_2 + a_3 + \dots + a_{n-2} + a_{n-1} + a_n \quad (1)$$

ou invertendo a ordem das parcelas:

$$S = a_n + a_{n-1} + a_{n-2} + \dots + a_3 + a_2 + a_1 \quad (2)$$

Adicionemos (1) e (2) membro a membro, e grupemos os termos de cada coluna. Virá:

$$2S = (a_1 + a_n) + (a_2 + a_{n-1}) + (a_3 + a_{n-2}) + \dots + (a_{n-1} + a_2) + (a_n + a_1)$$

De acôrdo com a segunda propriedade, todos os parênteses são iguais a $a_1 + a_n$. Como são n parênteses, conclui-se:

$$2S = (a_1 + a_n) \cdot n$$

donde:

$$S = \frac{(a_1 + a_n) \cdot n}{2}$$

que é a fórmula procurada.

Exemplos:

1.º) Achar a soma dos cinco termos de uma progressão em que os extremos são 4 e 210.

$$S = \frac{(4 + 210) 5}{2} = 535$$

2.º) Achar a soma dos n primeiros números pares.

Os números pares formam uma progressão aritmética de razão 2 onde se tem:

$$a_1 = 2 \text{ e } a_n = 2 + (n-1) \times 2 = 2 + 2n - 2 = 2n$$

Aplicando a fórmula (II), teremos, então:

$$S = \frac{(2 + 2n) \cdot n}{2} \text{ ou } S = (n + 1)n$$

Assim, a soma dos sete primeiros números pares, por exemplo, será:

$$8 \times 7 = 56$$

9. Problemas. As fórmulas (I) e (II) formam o sistema de equações:

$$\begin{cases} a_n = a_1 + (n-1)r \\ S = \frac{(a_1 + a_n) \cdot n}{2} \end{cases}$$

onde figuram cinco elementos: a_1 , a_n , r , n e S .

Assim, se forem dados três desses elementos, poderemos, por intermédio do mesmo sistema, calcular os outros dois.

Considerando os cinco elementos dois a dois, resultarão dez problemas distintos.

Exemplo:

Calcular o primeiro termo e o número de termos de uma progressão aritmética limitada de razão 3, onde o último termo é 19 e a soma dos termos, 69.

Resolução.

Os elementos dados são: $a_n = 19$, $r = 3$ e $S = 69$.

Substituindo estes valores no sistema, vem:

$$\begin{cases} 19 = a_1 + (n-1) \cdot 3 \\ 69 = \frac{(a_1 + 19)n}{2} \end{cases} \quad \text{ou} \quad \begin{cases} a_1 = 22 - 3n \\ a_1 \cdot n + 19n = 138. \end{cases}$$

Substituindo o valor de a_1 na segunda equação:

$$(22 - 3n)n + 19n = 138$$

Daí, a equação do segundo grau:

$$3n^2 - 41n + 138 = 0.$$

Donde

$$n = \frac{41 \pm \sqrt{1681 - 1656}}{6} = \frac{41 \pm 5}{6} \therefore \begin{cases} n' = 7 \frac{2}{3} \\ n'' = 6 \end{cases}$$

Como n é necessariamente inteiro e positivo, teremos:

$$n = 6 \quad \text{e} \quad a_1 = 22 - 18 = 4.$$

10. Interpolação aritmética.

Interpolar ou inserir m meios aritméticos entre dois números dados a e b é formar uma progressão aritmética de $m + 2$ termos, cujos extremos sejam a e b .

O problema fica resolvido desde que se conheça a razão pois, se tivermos o valor de r , o primeiro meio será $a + r$, o segundo $a + 2r$, e assim por diante.

Determinação da razão. A progressão formada terá $m + 2$ termos; logo, a fórmula do termo geral dará:

$$b = a + (m + 1) \cdot r \quad \dots \quad \boxed{r = \frac{b - a}{m + 1}} \quad (\text{III})$$

Exemplo:

Inserir 5 meios aritméticos entre 3 e 27.

Aplicando a fórmula da razão, vem:

$$r = \frac{27 - 3}{5 + 1} = \frac{24}{6} = 4.$$

A inserção dará:

$$3 \cdot 7 \cdot 11 \cdot 15 \cdot 19 \cdot 23 \cdot 27$$

II) PROGRESSÕES GEOMÉTRICAS

11. Definição.

Progressão geométrica é a sucessão em que o quociente da divisão de cada termo pelo precedente é uma constante, denominada razão.

Exemplos:

1.º) A sucessão 2, 6, 18, 54 ... é uma progressão geométrica, cuja razão é 3, porque:

$$\frac{6}{2} = 3; \quad \frac{18}{6} = 3; \quad \frac{54}{18} = 3; \dots$$

2.º) A sucessão 21, 7, $\frac{7}{3}$, ..., é uma progressão geométrica, cuja razão é:

$$\frac{7}{21} = \frac{1}{3}.$$

OBSERVAÇÕES.

1.ª) Da definição conclui-se que a razão se obtém dividindo um termo qualquer pelo precedente. Assim, dada a progressão geométrica

$$\frac{\sqrt{3}-1}{2}, \quad \frac{1}{2}, \quad \frac{\sqrt{3}+1}{4}, \quad \dots$$

se representarmos a razão pela letra q , teremos:

$$q = \frac{1}{2} : \frac{\sqrt{3}-1}{2} = \frac{1}{2} \times \frac{2}{\sqrt{3}-1} = \frac{1}{\sqrt{3}-1} = \frac{\sqrt{3}+1}{2}$$

2.ª) Se representarmos, de modo geral, os termos de uma progressão geométrica por a_1, a_2, a_3 , etc. e a razão pela letra q , teremos:

$$\frac{a_2}{a_1} = q, \quad \frac{a_3}{a_2} = q, \quad \text{etc.}$$

e, portanto:

$$a_2 = a_1 \cdot q, \quad a_3 = a_2 \cdot q, \quad \text{etc.}$$

Isto é, cada termo é igual ao produto do precedente pela razão.

12. Notação. Indica-se que uma sucessão é progressão geométrica precedendo o primeiro termo de **quatro** pontos e separando dois termos consecutivos por **dois** pontos.

Para indicar que as sucessões anteriormente exemplificadas são progressões geométricas, escreve-se:

$$:: 2 : 6 : 18 : 54 : \dots$$

$$:: 21 : 7 : \frac{7}{3} : \dots$$

$$:: \frac{\sqrt{3}-1}{2} : \frac{1}{2} : \frac{\sqrt{3}+1}{4} : \dots$$

13. Diversos tipos de progressão.

1.ª) Quanto à *grandeza relativa* dos termos as progressões geométricas podem ser:

a) **Crescentes**, quando cada termo é maior que o precedente. Exemplo.

$$:: 4 : 12 : 36 : \dots$$

Neste caso, tem-se:

$$q > 1$$

b) **Decrescentes**, quando cada termo é menor que o precedente. Exemplo.

$$:: 3 : 1 : 1/3 : \dots$$

Neste caso, tem-se:

$$q < 1$$

2.ª) Quanto ao *número de termos* as progressões geométricas podem ser:

a) **Ilimitadas**, quando todo termo tem conseqüente, isto é, quando não há último termo, o que se indica escrevendo

$$:: 3 : 9 : 27 : \dots$$

b) **Limitadas**, quando se considera um último termo sem conseqüente. Assim as cinco primeiras potências de 2, formam uma progressão geométrica de 5 termos, que se escreve:

$$:: 2 : 4 : 8 : 16 : 32.$$

OBSERVAÇÕES. Não consideraremos as progressões geométricas onde

$$a) \quad q = 1,$$

caso em que todos os termos seriam iguais;

$$b) \quad q \leq 0,$$

caso em que os sinais seriam alternados ou todos os termos nulos.

14. Termo geral. *Termo geral* é a expressão que traduz um termo qualquer da progressão geométrica. Representa-se pelo símbolo a_n , onde a cada valor de n da sucessão dos números naturais, corresponde um termo.

Exemplo: Na progressão geométrica formada pelas potências de 2:

$$:: 1:2:4:8:...$$

o termo geral é:

$$a_n = 2^{n-1}$$

pois, no primeiro termo o expoente é zero, no segundo é 1, no terceiro é 2, e assim por diante.

15. Fórmula do termo geral. Consideremos a progressão geométrica:

$$:: a_1 : a_2 : a_3 : \dots : a_n : \dots,$$

onde a_n representa o termo geral,

Teremos, por definição:

$$\left. \begin{array}{l} a_2 = a_1 \cdot q \\ a_3 = a_2 \cdot q \\ \vdots \\ a_n = a_{n-1} \cdot q \end{array} \right\} (n-1 \text{ igualdades})$$

Multiplicando as $n-1$ igualdades, membro a membro, obteremos:

$$a_2 \cdot a_3 \dots a_n = a_1 a_2 \dots a_{n-1} \cdot q^{n-1}$$

Dividindo os dois membros pelo produto comum

$$a_2 a_3 \dots a_{n-1},$$

vem, finalmente, a fórmula:

$$\boxed{a_n = a_1 \cdot q^{n-1}} \quad (I)$$

Conclui-se:

Um termo qualquer é igual ao produto do primeiro termo pela potência da razão, cujo expoente é o número de precedentes.

Exemplo:

Calcular o quinto termo de $:: 3:6:...$

Temos: $a_1 = 3, \quad q = \frac{6}{3} = 2 \quad \text{e} \quad n = 5.$

Aplicando a fórmula (I), vem:

$$a_5 = 3 \times 2^{5-1} = 3 \times 2^4 = 3 \times 16 = 48.$$

16. Problemas de aplicação do termo geral. Na fórmula (I) figuram os quatro elementos a_n, a_1, n e q . Se forem dados três desses elementos, obteremos uma equação, cuja incógnita será o quarto elemento, e que permitirá calculá-lo.

Existem, pois, quatro problemas simples decorrentes da fórmula (I). É óbvio que outros problemas poderão ser formulados de aplicação combinada da mesma fórmula.

1.º CÁLCULO DE a_n . É o problema de aplicação direta da fórmula (I).

Exemplo:

Calcular o quarto termo de uma progressão geométrica, cujo primeiro termo é $9b$ e a razão, $-\frac{2}{3}a^2b$.

Temos:

$$a_1 = 9b, \quad q = -\frac{2}{3}a^2b \quad \text{e} \quad n = 4.$$

Aplicando a fórmula (I); resulta:

$$a_4 = 9b \cdot \left(-\frac{2}{3}a^2b\right)^3$$

ou

$$a_4 = 9b \cdot \left(-\frac{8}{27}a^6b^3\right) = -\frac{8}{3}a^6b^4.$$

2.º CÁLCULO DE a_1 .

Exemplo:

Calcular o primeiro termo de uma progressão geométrica, onde o quinto termo vale 405 e a razão 3.

Tem os: $n = 5, \quad a_n = 405 \quad \text{e} \quad q = 3.$

Substituindo os valores na fórmula (I), temos a equação de uma incógnita:

$$405 = a_1 \times 3^4$$

donde:

$$a_1 = \frac{405}{81} = 5.$$

3.º) CÁLCULO DE q .

Exemplo:

Calcular a razão de uma progressão geométrica em que o quarto termo é 192 e o primeiro termo, 3.

Temos: $a_1 = 3, a_n = 192$ e $n = 4$.

Substituindo na fórmula (I):

$$192 = 3 \times q^3 \dots q^3 = \frac{192}{3} = 64$$

$$q = \sqrt[3]{64} = 4.$$

4.º) CÁLCULO DE n .

Exemplo:

Numa progressão geométrica, cujo primeiro termo é 5 e a razão, 3, qual o termo que vale 405?

Temos: $a_1 = 5, a_n = 405$ e $q = 3$.

A fórmula (I) dá a equação:

$$405 = 5 \times 3^{n-1} \dots 3^{n-1} = 81 \dots (1)$$

donde resulta:

$$3^{n-1} = 3^4$$

e, conseqüentemente:

$$n - 1 = 4 \text{ e } n = 5.$$

OBSERVAÇÃO. O quarto problema conduz a uma equação (1) que contém a incógnita em expoente e se denomina *equação exponencial*, cuja resolução será estudada particularmente.

5.º) PROBLEMAS COMBINADOS.

Primeiro exemplo:

Escrever a progressão geométrica, cujo sexto termo é $\frac{5}{8}$ e o

nonô, $\frac{5}{64}$.

Resolução:

A fórmula (I), aplicada aos dois termos dados, fornece o sistema:

$$\begin{cases} a_6 = a_1 \cdot q^5 \\ a_9 = a_1 \cdot q^8 \end{cases}$$

Substituindo os valores dados:

$$\begin{cases} \frac{5}{8} = a_1 \cdot q^5 \\ \frac{5}{64} = a_1 \cdot q^8 \end{cases}$$

Dividindo, membro a membro:

$$q^3 = \frac{1}{8} \dots q = \frac{1}{2}.$$

Substituindo o valor de q na primeira equação:

$$\frac{5}{8} = a_1 \times \frac{1}{32} \dots a_1 = 20.$$

Conhecidos o primeiro termo e a razão, a progressão será:

$$: : 20 : 10 : 5 : \dots$$

Segundo exemplo:

Achar três números em progressão geométrica, sendo a soma 147 e a soma do primeiro com o terceiro, 119.

Resolução:

Seja x o primeiro número e q a razão, teremos o sistema:

$$\begin{cases} x + xq + xq^2 = 147 \\ x + xq^2 = 119 \end{cases}$$

donde, colocando x em evidência:

$$\begin{cases} x(1 + q + q^2) = 147 \\ x(1 + q^2) = 119 \dots (1) \end{cases}$$

e, dividindo:

$$\frac{1 + q + q^2}{1 + q^2} = \frac{147}{119} = \frac{21}{17}$$

Dai, a equação do segundo grau:

$$4q^2 - 17q + 4 = 0,$$

cujas raízes são: $q_1 = 4$ e $q_2 = \frac{1}{4}$

levando em (1): $x_1 = 7$ e $x_2 = 112$

Os números procurados são:

$$: : 7 : 28 : 112. \text{ ou } : : 112 : 28 : 7.$$

17. Propriedades das progressões geométricas.

1.ª)

Em toda progressão geométrica qualquer termo é a média geométrica entre o antecedente e o conseqüente.

Suponhamos a progressão:

$$: : a_1 : a_2 : a_3 : \dots : a_{h-1} : a_h : a_{h+1} : \dots$$

onde os três termos a_{h-1} , a_h e a_{h+1} são consecutivos. Teremos a tese:

$$a_h^2 = a_{h-1} \cdot a_{h+1}$$

Demonstração.

Por definição, temos:

$$\frac{a_h}{a_{h-1}} = q \quad \text{e} \quad \frac{a_{h+1}}{a_h} = q,$$

donde resulta:

$$\frac{a_h}{a_{h-1}} = \frac{a_{h+1}}{a_h} \quad \text{e} \quad \boxed{a_h^2 = a_{h-1} \cdot a_{h+1}}$$

2.ª)

Em toda progressão geométrica limitada o produto de dois termos equidistantes dos extremos é igual ao produto dos extremos.

Demonstração. Suponhamos a progressão limitada

$$: : a : b : \dots : T : \dots : T' : \dots : k : l.$$

onde T e T' sejam dois termos equidistantes dos extremos, isto é, admitamos que T tenha p precedentes e T' , p conseqüentes.

Em virtude da fórmula do termo geral, teremos, sendo q a razão:

$$T = aq^p \quad (1)$$

Se considerarmos a progressão parcial a partir de T' , teremos, análogamente:

$$l = T' \cdot q^p \quad (2)$$

Dividindo as igualdades (1) e (2), membro a membro, vem:

$$\frac{T}{l} = \frac{a}{T'} \quad \therefore \quad \boxed{TT' = al}$$

OBSERVAÇÃO. Se o número de termos for ímpar, o termo médio m será média geométrica entre os termos extremos em virtude da primeira propriedade, isto é:

$$m^2 = al$$

18. Produto dos termos. Seja calcular o produto dos n termos da progressão limitada

$$: : a_1 : a_2 : a_3 : \dots : a_{n-2} : a_{n-1} : a_n.$$

Teremos, sendo P o produto procurado:

$$P = a_1 \cdot a_2 \cdot a_3 \dots a_{n-2} \cdot a_{n-1} \cdot a_n \quad (1)$$

ou, em virtude da propriedade comutativa:

$$P = a_n \cdot a_{n-1} \cdot a_{n-2} \dots a_3 \cdot a_2 \cdot a_1 \quad (2)$$

Multiplicando as duas igualdades, membro a membro, e agrupando os termos correspondentes, virá:

$$P^2 = (a_1 a_n) \cdot (a_2 a_{n-1}) \cdot (a_3 a_{n-2}) \dots (a_3 a_{n-2}) \cdot (a_2 a_{n-1}) \cdot (a_1 a_n)$$

Os parênteses são todos iguais ao produto dos extremos, em virtude da segunda propriedade. Logo, temos:

$$P^2 = (a_1 a_n)^n \quad \therefore \quad \boxed{P = \sqrt{(a_1 a_n)^n}} \quad (II)$$

Exemplo:

Calcular o produto dos seis primeiros termos da progressão

$$:: \frac{1}{4} : \frac{1}{2} : \dots$$

O sexto termo é: $a_6 = \frac{1}{4} \times 2^5 = 8$.

Assim a fórmula (II) dará:

$$P = \sqrt{\left(\frac{1}{4} \times 8\right)^6} = 8.$$

19. Soma dos termos.

PRIMEIRO CASO: Progressão limitada. Seja calcular a soma dos n termos da progressão limitada

$$:: a_1 : a_2 : a_3 : \dots : a_{n-1} : a_n.$$

A soma dos termos será:

$$S = a_1 + a_2 + a_3 + \dots + a_{n-1} + a_n \quad (1)$$

Multiplicando os dois membros pela razão q , teremos:

$$Sq = a_1q + a_2q + a_3q \dots + a_{n-1}q + a_nq$$

ou, em virtude da definição:

$$Sq = a_2 + a_3 + a_4 + \dots + a_n + a_nq \quad (2)$$

Subtraindo, membro a membro, a igualdade (1) da igualdade (2) e reduzindo os termos semelhantes, virá:

$$Sq - S = a_nq - a_1 \quad \text{ou} \quad S(q - 1) = a_nq - a_1$$

donde, finalmente, a fórmula:

$$S = \frac{a_nq - a_1}{q - 1} \quad (\text{III})$$

OBSERVAÇÃO. Se substituirmos o termo geral a_n pelo valor da fórmula I, a fórmula III torna-se:

$$S = \frac{a_1q^n - a_1}{q - 1} \quad \text{ou} \quad S = \frac{a_1(q^n - 1)}{q - 1} \quad (\text{III}) \text{ A}$$

em que não figura o último termo.

SEGUNDO CASO. Progressão ilimitada. Se supuzermos que o número n de termos aumenta indefinidamente, obtaremos uma *progressão ilimitada*.

Neste caso, para obter a soma dos termos, considerando o número ilimitado de termos, devemos formular duas hipóteses.

Primeira hipótese: a progressão é crescente ($q > 1$).

Nesta hipótese, se considerarmos a expressão da soma

$$S = \frac{a_1(q^n - 1)}{q - 1},$$

observaremos que, por ser q maior que 1, o valor de q^n cresce indefinidamente com n e, portanto, o mesmo acontece com S , o que se traduz pela igualdade simbólica:

$$S = \infty$$

Segunda hipótese: a progressão é decrescente ($q < 1$).

Consideremos a fórmula da soma

$$S = \frac{a_1q^n - a_1}{q - 1} \quad \text{ou} \quad S = \frac{a_1 - a_1q^n}{1 - q},$$

que se pode transformar em

$$S = \frac{a_1}{1 - q} - \frac{a_1q^n}{1 - q}.$$

Como a razão q é menor que 1, quanto maior fôr o valor de n menor será o de q^n e, conseqüentemente, o de $\frac{a_1q^n}{1 - q}$.

Assim, se tomarmos valores de n suficientemente grandes, a soma de n termos diferirá de $\frac{a_1}{1 - q}$ de uma quantidade tão pequena quanto quisermos.

Diremos que a soma dos termos da progressão geométrica ilimitada é um valor limite dado pelo quociente da divisão do primeiro termo pela diferença entre a unidade e a razão e escreveremos:

$$S = \frac{a_1}{1-q} \quad (\text{IV})$$

Exemplos:

1.º) Achar a soma dos cinco primeiros termos da progressão :: 1. 3. 9 ...

Aplicando a fórmula III A, vem:

$$S = \frac{1(3^5 - 1)}{3 - 1} = \frac{243 - 1}{2} = \frac{242}{2} = 121.$$

2.º) Achar a soma dos termos da progressão ilimitada:

$$:: \sqrt{3} : 1 : \dots$$

Temos:

$$S = \frac{a_1}{1-q} = \frac{\sqrt{3}}{1 - \frac{1}{\sqrt{3}}} = \frac{3}{\sqrt{3}-1} = \frac{3(\sqrt{3}+1)}{2}$$

3.º) Achar a geratriz da dízima 0,3636...

Podemos escrever:

$$0,3636\dots = \frac{36}{100} + \frac{36}{10\,000} + \dots$$

O segundo membro é a soma dos termos de uma progressão geométrica ilimitada cuja razão é

$$\frac{36}{10\,000} : \frac{36}{100} = \frac{1}{100}$$

Logo temos:

$$S = \frac{\frac{36}{100}}{1 - \frac{1}{100}} = \frac{\frac{36}{100}}{\frac{99}{100}} = \frac{36}{99}$$

20. Problemas. De um modo geral, os problemas sobre progressões geométricas resolvem-se por intermédio de sistemas de equações decorrentes das fórmulas:

$$a_n = a_1 q^{n-1} \quad (\text{I}); \quad P = |\sqrt[n]{(a_1 a_n)^n}| \quad (\text{II})$$

$$S_n = \frac{a_1(q^n - 1)}{q - 1} \quad (\text{III}); \quad S = \frac{a_1}{1-q} \quad (\text{IV})$$

Primeiro exemplo:

Calcular a soma dos termos e a razão de uma progressão geométrica de 7 termos, cujos extremos são 1 e 729.

Resolução. Temos o sistema das fórmulas I e III:

$$\begin{cases} 729 = 1 \cdot q^6 \\ S = \frac{1(q^7 - 1)}{q - 1} \end{cases} \quad \begin{cases} q = \sqrt[6]{729} = 3 \\ S = \frac{3^7 - 1}{3 - 1} = 1\,093. \end{cases}$$

Segundo exemplo:

Calcular os termos extremos de uma progressão geométrica de cinco termos, cuja soma é 155 e a razão 2.

Temos o sistema das fórmulas I e III:

$$\begin{cases} a_n = a_1 \cdot 2^4 \\ 155 = \frac{a_1(2^5 - 1)}{2 - 1} \end{cases} \quad \text{ou} \quad \begin{cases} a_n = 16a_1 \\ 155 = 31a_1 \end{cases}$$

Resulta: $a_1 = 5$ e $a_n = 80$.

Terceiro exemplo:

Numa progressão geométrica ilimitada a soma dos termos ao infinito é 8 e a soma dos quatro primeiros termos é $\frac{15}{2}$. Escrever a progressão.

Resolução. As fórmulas III e IV fornecem o sistema:

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{15}{2} = \frac{a_1 (q^4 - 1)}{q - 1} \\ 8 = \frac{a_1}{1 - q} \end{array} \right. \quad \text{ou} \quad \left\{ \begin{array}{l} \frac{a_1 (1 - q^4)}{1 - q} = \frac{15}{2} \\ \frac{a_1}{1 - q} = 8 \end{array} \right.$$

Dividindo a primeira equação pela segunda, vem:

$$1 - q^4 = \frac{15}{16} \quad \text{ou}$$

$$q^4 = \frac{1}{16} \quad \text{e} \quad q = \pm \frac{1}{2}$$

Daf, a solução:

$$q = \frac{1}{2} \quad \therefore \quad a_1 = 8 \left(1 - \frac{1}{2} \right) = 4$$

E a progressão será $::4:2:1:...$

21. Interpolação geométrica. Interpolar ou inserir m meios geométricos entre dois números dados a e b é colocar entre estes dois, m outros, tais que o conjunto forme uma progressão geométrica, cujos extremos sejam a e b .

O problema reduz-se à determinação da razão, visto como conhecemos o número de termos $m + 2$, o primeiro termo a e o último b . Assim temos:

$$b = aq^{m+1}$$

onde resulta

$$q = \sqrt[m+1]{\frac{b}{a}}$$

Exemplo:

Inserir quatro meios geométricos entre 6 e 192.

A razão será:

$$q = \sqrt[5]{\frac{192}{6}} = \sqrt[5]{32} = 2$$

Assim, temos:

$$:: 6 : 12 : 24 : 48 : 96 : 192$$

RESUMO DAS PROGRESSÕES

ELEMENTOS	ARITMÉTICAS	GEOMÉTRICAS
Térmo geral.....	$a_n = a_1 + (n-1)r$	$a_n = a_1 q^{n-1}$
Soma (limitada).....	$S = \frac{(a_1 + a_n)n}{2}$	$S = \frac{a_1(q^n - 1)}{q - 1}$
Soma (ilimitada).....	$S = \pm \infty$	$S = \frac{a_1}{1 - q}$
Produto.....		$P = \sqrt{(a_1 a_n)^n} $
Razão (inserção).....	$r = \frac{b - a}{m + 1}$	$q = \sqrt[m+1]{\frac{b}{a}}$

EXERCÍCIOS

1. Achar o décimo quarto termo da progressão: 29 . 25... *Resp.*: - 23.
2. Achar o oitavo termo da progressão: 7 . 12 . 17... *Resp.*: 42.
3. Achar o sétimo termo de: $x . x + 2y . \dots$ *Resp.*: $x + 12y$.
4. Achar o termo geral de: 3 . 8 . 13. ... *Resp.*: $a_n = 5n - 2$.
5. Numa progressão aritmética o sétimo termo é $7\sqrt{3}$ e a razão, $2\sqrt{3}$.
Calcular o primeiro termo. *Resp.*: $-5\sqrt{3}$.

6. Calcular o número de termos de uma progressão aritmética limitada, de razão -3 , cujos termos extremos valem $4\frac{2}{3}$ e $-\frac{40}{3}$. *Resp.: 7.*
7. Calcular a razão de uma progressão aritmética de 7 termos, cujos extremos valem respectivamente 4 e 8. *Resp.: $\frac{2}{3}$.*
8. O terceiro termo de uma progressão aritmética é 10 e o oitavo, 40. Achar a razão. *Resp.: 6.*
9. O quarto termo de uma progressão aritmética é 30 e o segundo, 18. Achar a soma dos 10 primeiros termos. *Resp.: 390.*
10. Numa progressão aritmética o quinto termo é 27 e o décimo, 52. Qual a razão? *Resp.: 5.*
11. Numa progressão aritmética o primeiro termo é 8 e a diferença entre o vigésimo e o décimo segundo é 16. Achar o terceiro termo. *Resp.: 12.*
12. Achar a soma dos 30 primeiros números ímpares. *Resp.: 900.*
13. A soma dos termos de uma progressão aritmética limitada é 105 e a soma do primeiro e último termos é 30. Achar o número de termos. *Resp.: 7.*
14. A soma dos termos de uma progressão aritmética de 7 termos é 77. O último termo é 10 vezes o primeiro. Escrever a progressão. *Resp.: $2 \cdot 5 \cdot 8$.*
15. Achar a soma dos 15 primeiros termos da progressão: $4 \cdot 7 \cdot 10 \dots$. *Resp.: 375.*
16. Achar a soma dos 10 primeiros termos da progressão: $3 \cdot 5 \cdot \frac{2}{3} \dots$. *Resp.: 150.*
17. Achar a soma dos 20 primeiros termos da progressão: $x \cdot x - y \dots$. *Resp.: $20x - 190y$.*
18. Achar a soma de 7 números em progressão aritmética, cujo primeiro termo é 3 e a razão; 5. *Resp.: 126.*
19. Sendo $a_1 = 7$, $n = 8$ e $a_n = 28$, achar r e S . *Resp.: 3 e 140.*
20. Sendo $a_1 = -5$, $n = 7$ e $r = 2$, achar a_n e S . *Resp.: 7 e 7.*
21. Sendo $a_n = 19$, $n = 6$ e $r = 3$, achar a_1 e S . *Resp.: 4 e 69.*
22. Sendo $S = 63$, $a_1 = 3$ e $r = 2$, achar a_n e n . *Resp.: 15 e 7.*
23. Sendo $S = 87$, $n = 6$ e $r = 3$, achar a_1 e a_n . *Resp.: 7 e 22.*
24. Sendo $a_n = 44$, $n = 9$ e $S = 216$, achar a_1 e r . *Resp.: 4 e 5.*
25. Sendo $a_1 = 4$, $a_n = 19$ e $r = 3$, achar n e S . *Resp.: 6 e 69.*
26. Sendo $a_1 = -5$, $a_n = 7$ e $S = 7$, achar n e r . *Resp.: 7 e 2.*
27. Sendo $a_n = -17$, $r = -4$ e $S = -35$, achar a_1 e n . *Resp.: 7 e 7.*
28. Sendo $a_1 = 21$, $n = 5$ e $S = 35$, achar r e a_n . *Resp.: -7 e -7 .*
29. Deduzir a fórmula para o cálculo de n , sendo dados a_1 , r e S .

$$\text{Resp.: } \frac{r - 2a_1 + \sqrt{8rS + (r - 2a_1)^2}}{2r}$$

30. Instituir a fórmula da soma dos n primeiros números naturais.
Resp.: $\frac{n(n+1)}{2}$
31. Instituir a fórmula da soma dos n primeiros números ímpares. *Resp.: n^2 .*
32. Inserir 8 meios aritméticos entre 24 e 105. *Resp.: $r = 9$.*
33. Quantos termos da progressão: $-5, -3, \dots$ se deve tomar para que a soma seja 7? *Resp.: 7.*
34. Quantos múltiplos de 11 existem entre 100 e 1 000? *Res.: 81.*
35. Numa progressão aritmética de 8 termos, o primeiro termo é 3 e a razão, 5. Calcular a soma dos termos e o último termo. *Resp.: 164 e 38.*
36. Numa progressão aritmética de 10 termos, o último termo é 22 e a razão, 2. Achar o primeiro termo e a soma. *Resp.: 4 e 130.*
37. A diferença entre o sétimo e o segundo termos de uma progressão aritmética é 20 e a soma do terceiro com o quinto é 28. Escrever a progressão. *Resp.: $2 \cdot 6 \cdot 10 \dots$*
38. Numa progressão aritmética tem-se: $a_1 = 95$, $n = 19$ e $a_n = 5$. Achar r e S . *Resp.: -5 e 950.*
39. Numa progressão aritmética tem-se: $a_n = 18$, $r = 2$ e $S = 88$. Achar a_1 e n . *Resp.: -2 e 11 ou 4 e 8.*
40. A soma dos 6 primeiros termos de uma progressão aritmética é nula e a diferença entre o quinto e o terceiro é $4\sqrt{3}$. Escrever a progressão. *Resp.: $-5\sqrt{3}, -3\sqrt{3}, \dots$*
41. A soma de três números em progressão aritmética é 18 e o produto, 162. Calcular os três números. *Resp.: 3, 6 e 9.*
42. A soma de três números em progressão aritmética é 15 e a soma de seus quadrados é 93. Achar os três números. *Resp.: 2, 5 e 8.*
43. Achar 3 números em progressão aritmética sendo sua soma 21 e a soma de seus quadrados, 165. *Resp.: 4, 7 e 10.*
44. Achar quatro números em progressão aritmética de modo que a soma seja 28, e o produto do segundo pelo terceiro exceda o produto do primeiro pelo quarto de 8 unidades. *Resp.: 4, 6, 8 e 10.*
45. Achar quatro números em progressão aritmética de modo que o produto dos termos extremos seja 45 e o dos dois do meio seja 77. *Resp.: 3, 7, 11 e 15 ou $-3, -7, -11$ e -15 .*
46. A soma de cinco números inteiros em progressão aritmética é 25 e o produto, 945. Achar esses números. *Resp.: 1, 3, 5, 7, 9.*
47. Achar três números em progressão aritmética, conhecendo sua soma 15 e seu produto 105. *Resp.: 3, 5 e 7.*
48. A soma dos três primeiros termos de uma progressão aritmética é 30 e o primeiro termo é 5. Achar o último deles. *Resp.: 15.*

49. A soma de três números em progressão aritmética é 15 e a soma dos produtos dois a dois é 66. Achar os três números. *Resp.*: 2,5 e 8.
50. Numa progressão aritmética a soma dos termos é 30. O primeiro termo é igual à razão que vale 2. Achar o último termo e o número de termos. *Resp.*: 10 e 5.
51. Determinar m na equação $x^4 - (4m - 6)x^2 + m^2 = 0$, de modo que as raízes formem uma progressão aritmética. *Resp.*: 9.
52. Um ciclista percorre 20 km na primeira hora, 17 km na segunda e assim por diante, em progressão aritmética. Quanto tempo gastará para percorrer 77 km? *Resp.*: 7 horas.
53. Achar os valores de a_1 e r , sabendo que a soma de n termos de uma progressão aritmética é, sempre, $\frac{n(5n+7)}{2}$, qualquer que seja n . *Resp.*: $a_1 = 6$; $r = 5$.
54. Determinar a relação que deve existir entre os coeficientes da equação biquadrada $ax^4 + bx^2 + c = 0$, para que as raízes fiquem em progressão aritmética. *Resp.*: $9b^2 - 100ac = 0$.
55. A soma dos sete primeiros termos de uma progressão aritmética é 119 e a soma dos quinze primeiros termos, 495. Escrever a progressão. *Resp.*: $-5, 9, 13, \dots$
56. Calcular x de modo que $3x - 1$, $x + 3$ e $x + 9$ sejam termos consecutivos de uma progressão aritmética, na ordem enunciada. Achar a razão. *Resp.*: $x = -1$ e $r = 6$.
57. Provar que, se $\frac{1}{a+b}$, $\frac{1}{b+c}$, $\frac{1}{a+c}$ forem termos consecutivos de uma progressão aritmética, a^2 , b^2 e c^2 também o serão. (E. Arquitetura da U. M. G., 1953).
58. Calcular a soma dos vinte primeiros termos da progressão aritmética cujo termo geral tem para expressão $a_n = 3n + 5$. *Resp.*: 730.
59. O perímetro de um triângulo retângulo é de 48 m e os lados estão em progressão aritmética. Achar os lados. *Resp.*: 12 m, 16 m e 20 m.
60. Numa progressão aritmética com número ímpar de termos, a soma dos termos de ordem ímpar é 63 e a dos termos de ordem par é 54. Achar n . *Resp.*: 13.
61. Numa progressão aritmética o último termo vale 10 vezes o primeiro e o penúltimo é igual à soma do quarto com o quinto. Achar o número de termos. *Resp.*: 10.
62. Achar quatro números em progressão aritmética, sabendo que a sua soma é 26 e a soma de seus quadrados é 214. (E. Militar, 1932). *Resp.*: 2, 5, 8 e 11.

63. Instituir a fórmula que dá a soma dos quadrados dos n primeiros números ímpares (E. Militar, 1939) *Resp.*: $\frac{n(2n+1)(2n-1)}{3}$.
64. Achar o quinto termo de $::3:9:\dots$ *Resp.*: 243.
65. Numa progressão geométrica de razão 3, cujo primeiro termo é 4, qual o termo que vale 324? *Resp.*: 5.º
66. Qual o primeiro termo de uma progressão geométrica, cujo sétimo termo é 384 e a razão, 2? *Resp.*: 6.
- + 67. Achar o sétimo termo de $::9b:6a^2b^2:\dots$ *Resp.*: $\frac{64}{81}a^{12}b^7$
- + 68. O terceiro termo de uma progressão geométrica de razão 3 é 45. Calcular o primeiro e o sexto termos. *Resp.*: 5 e 1215.
69. Qual a razão de uma progressão geométrica de cinco termos, cujos extremos são 3 e 48? *Resp.*: 2.
70. Achar a expressão de termo geral das progressões:
- a) $::6:4:\dots$ *Resp.*: $a_n = \frac{2^n}{3^{n-2}}$
- b) $::1:x:x^2:\dots$ *Resp.*: $a_n = x^{n-1}$
- c) $::\frac{n}{n+1}:\frac{n}{(n+1)^2}:\dots$ *Resp.*: $a_n = \frac{n}{(n+1)^n}$
71. Calcular o primeiro termo e a soma de uma progressão geométrica de cinco termos, onde o último termo é 4 e a razão, $1/2$. *Resp.*: 64 e 124.
72. Dados $a_1 = 7$, $n = 3$ e $S = 147$, calcular a_n e q . *Resp.*: 112 e 4.
73. Calcular a soma dos quatro primeiros termos da progressão geométrica, cujo termo geral é $a_n = 3 \cdot 2^n$. *Resp.*: 90.
74. Achar a soma ao infinito $50 + 10 + 2 + \dots$ *Resp.*: 62,5.
75. Achar, aplicando a fórmula da soma, a geratriz da dízima 0,32626 ...
- Resp.*: $\frac{323}{990}$
76. Achar, aplicando a fórmula da soma, a geratriz da dízima 2,3737 ...
- Resp.*: $\frac{235}{99}$
77. Inserir três meios geométricos entre 14 e 224. *Resp.*: 28, 56 e 112.
78. Achar os termos extremos de uma progressão geométrica de cinco termos sendo a soma dos termos $147\frac{8}{9}$ e a razão, 3. *Resp.*: $11/9$ e 99.

79. Calcular o último termo e a soma dos termos de uma progressão geométrica de 7 termos, onde o primeiro termo é 5 e a razão, 2. *Resp.*: 320 e 635.
80. Achar o valor de x de modo que $x-3$, $x+1$ e $3x+3$ formem progressão geométrica. *Resp.*: $x = 5$.
81. A soma dos termos de uma progressão geométrica ilimitada é 9 e a diferença dos dois primeiros, 4. Achar o primeiro termo e a razão. *Resp.*: 6 e $1/3$.
82. Numa progressão geométrica a soma dos cinco primeiros termos é 93 e a razão, 2. Calcular os dois termos extremos. *Resp.*: 3 e 48.
83. Numa progressão geométrica tem-se: $a_1 = 9\sqrt{3}$ e $q = \sqrt{3}$. Calcular a_1 e S_5 . *Resp.*: $\sqrt{3}$ e $12 + 13\sqrt{3}$.
84. Sendo $a_1 = 5$, $q = 3$ e $n = 4$. Calcular a_4 e S_4 . *Resp.*: 135 e 200.
85. Sendo $a_1 = 4$, $a_n = 324$ e $n = 5$; calcular q e S_5 . *Resp.*: 3 e 484.
86. Sendo $a_1 = 7$, $n = 3$ e $S_3 = 147$, calcular a_3 e q . *Resp.*: 112 e 4.
87. Sendo $a_n = 54$, $n = 3$ e $S_3 = 78$. Calcular a_1 e q . *Resp.*: 6 e 3.
88. Calcular a soma dos sete primeiros termos da progressão $:: 1 : \sqrt{2} : \dots$. *Resp.*: $7\sqrt{2} + 15$.
89. Achar três números em progressão geométrica, sendo 26 a sua soma e 216 seu produto. *Resp.*: 2, 6, 18.
90. Quatro números estão em progressão geométrica. O produto dos dois primeiros é 12 e o dos dois últimos, 192. Achar os números. *Resp.*: $\sqrt{6}$, $2\sqrt{6}$, $4\sqrt{6}$, $8\sqrt{6}$.
91. Achar três números em progressão geométrica, sendo sua soma 52 e seu produto 1728. *Resp.*: 4, 12, 36.
92. Achar o limite de $\sqrt[n]{x \sqrt[n]{y} \sqrt[n]{x} \sqrt[n]{y} \dots}$. *Resp.*: $\sqrt[n]{x^2 y}$.
93. Achar o valor da soma $\frac{1}{3} + \frac{2}{9} + \frac{3}{27} + \frac{4}{81} \dots$, onde os numeradores formam progressão aritmética e os denominadores progressão geométrica. *Resp.*: $\frac{3}{4}$.
94. Achar quatro números em progressão geométrica, sendo a soma dos extremos 140 e a dos meios 60. *Resp.*: 5, 15, 45, 135.
95. Três números inteiros estão em progressão geométrica. Se somarmos 4 ao segundo a progressão torna-se aritmética. Se, em seguida, somarmos 32 ao terceiro, ela volta a ser geométrica. Achar os três números. *Resp.*: 2, 6 e 18.
96. Achar quatro números em progressão geométrica, sendo a diferença entre os extremos 130 e a diferença entre os meios 30. *Resp.*: 5, 15, 45, e 135.

97. A soma dos termos de uma progressão geométrica ilimitada é 8 e a soma dos dois primeiros é 6. Escrever a progressão. $:: 4 : 2 : 1 \dots$
98. O lado de um quadrado tem 4 m. Unem-se os pontos médios dos lados e obtém-se um novo quadrado. Unem-se os pontos médios dos lados do segundo quadrado e obtém-se um terceiro quadrado. E, assim, indefinidamente. Achar a soma das áreas de todos os quadrados. *Resp.*: 32 m^2 .
99. Que número devemos somar a 1, 11 e 41 para que os resultados fiquem em progressão geométrica? *Resp.*: 4.
100. Pede-se o primeiro termo e a razão de uma progressão geométrica de 4 termos, sendo a soma dos dois extremos 195 e a soma dos dois meios 60. (Escola de Aeronáutica). *Resp.*: 3 e 4 ou 192 e $1/4$.
101. Escrever a progressão geométrica ilimitada, cujo primeiro termo é 1, na qual cada termo é o dobro da soma de todos que o seguem. *Resp.*: $:: 1 : 1/3 : 1/9 : \dots$
102. Resolver a equação: $x + \frac{x}{2} + \frac{x}{4} + \frac{x}{8} + \dots = 48$ *Resp.*: 24.
103. Resolver a equação: $x \left(1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{9} + \dots \right) = 120$. *Resp.*: 80.
104. Calcular a soma dos 26 múltiplos da razão de uma progressão geométrica, cujo primeiro termo é 17 e a soma dos três primeiros termos 221. Considerar os múltiplos da razão a partir dela própria. (E. P. Univ. Católica — Rio de Janeiro, 1950). *Resp.*: 1053.
105. Dada uma progressão aritmética, cujo primeiro termo é 4 e o último 46 e sabendo que o número de termos é igual à razão, calcular a soma dos termos (E. N. de Química). *Resp.*: 175.
106. Numa progressão aritmética de número par de termos, a soma dos termos de ordem ímpar é 70 e a dos de ordem par é 85. A soma dos extremos é 31. Escrever a progressão. (E. N. Arquitetura) *Resp.*: 2 . 5 . 8 ... 29.
107. Os lados de um triângulo retângulo formam uma progressão aritmética de razão 4. Calcular o valor dos lados desse triângulo. (F. Ciências Ecôm. da U. Minas Gerais, 1951). *Resp.*: 12, 16 e 20.

Questões de Concurso

108. O termo médio da p. g., cujos termos extremos são a_1 e a_{2n+1} tem por valor (E. N. E., 58).
109. Calcule o limite da soma dos termos da progressão:
 $:: 1 + \sqrt{2} : 1 : \sqrt{2} - 1 : \dots$ (E. N. E., 58).
110. Calcule cinco números em p. a. tais que sua soma seja 20 e a soma de seus quadrados 82,5. (E. N. E., 58).
111. Escreva a p. g., que se obtém inserindo 3 meios geométricos entre 2 e 18. (E. Flu. E., 58).
112. Calcule quatro números em p. g. sabendo que a soma dos três primeiros é $2 + 3\sqrt{2}$ e a dos três últimos $6 + 2\sqrt{2}$. (E. P. U. C. — Rio, 58).

113. Calcule a soma dos n primeiros termos de uma progressão aritmética, cujo primeiro termo é a , sabendo que nessa progressão o quociente da soma dos n primeiros termos pela soma dos n termos seguintes é independente de n . (E.F.E. — 1959). *Resp.: $S_n = n^2 \cdot a$*

114. Estabeleça a condição para que a soma dos termos da progressão

$$\therefore \frac{a}{b} : \frac{2a - ab}{b} : \dots$$

tenha um limite finito e calcule esse limite. (E.F.E. — 1959)

$$\text{Resp.: } b > 1 \text{ e } \frac{a}{b(b-1)}$$

115. Em uma progressão geométrica, o 1.º termo é

$$\frac{25a^2}{4(a^2 + 1)} \text{ e o 4.º é } \frac{2(a^2 + 1)^2}{5a}$$

sendo $a > 0$.

I — Estabeleça as condições a que deve satisfazer a para que a progressão seja decrescente.

II — Calcule o limite da soma dos termos dessa progressão para o valor mínimo da razão. (E.N.E. — 1959)

$$\text{Resp.: } 0,5 < a < 2 \text{ e } 125/8$$

116. Escreva a progressão aritmética limitada tal que 1.º a soma dos termos seja 5, 2.º o último termo seja $7/3$ do primeiro, 3.º a razão seja igual ao inverso do número de termos. (E.F.E. — 1960)
Resp.: $3/5$. $4/5$. 1 . $6/5$. $7/5$.

117. Calcule o limite da soma dos termos da progressão geométrica limitada na qual $a_1 = \sqrt{2}$ e $a_2 = 2 - \sqrt{2}$ (E.P.U.C. — 1960)

$$\text{Resp.: } \sqrt{2} + 1$$

UNIDADE II

Logaritmos. Equações exponenciais

I) CONCEITO. VARIAÇÃO. PROPRIEDADES

1. **Definições.** Consideremos a igualdade que traduz o cálculo do valor da quarta potência de 3:

$$3^4 = 81.$$

O número 3 é a **base**; o número 4, o **expoente**; o número 81, a **potência**.

A operação denomina-se **potenciação** e tem duas operações inversas distintas por não ser comutativa. Realmente, 3^4 é diferente de 4^3 .

Assim, enquanto a adição e a multiplicação têm uma única inversa por serem comutativas ($a + b = b + a$ e $a \times b = b \times a$) que são a subtração e a divisão, a potenciação tem duas inversas.

Primeira inversa: Dada a **potência** e o **expoente**, achar a **base**. Se representarmos a base por x , indicaremos:

$$x^4 = 81 \text{ ou } x = \sqrt[4]{81} = 3.$$

A operação denomina-se, como sabemos, **radiciação**. A potência (81), passa a chamar-se **radicando**, o expoente (4) passa a chamar-se **índice** e a base incógnita ($x = 3$) chama-se **raíz**.

Segunda inversa: Dada a **potência** e a **base**, achar o **expoente**. Se representarmos o expoente incógnito por x , indicaremos:

$$3^x = 81.$$

Esta operação inversa denomina-se **logaritmação** ou **achar o logaritmo**.

A potência (81) passa a chamar-se **antilogaritmo** ou **número**; a base (3) continua a denominar-se **base** e o expoente incógnito ($x = 4$) chama-se **logaritmo**.

A nova operação indica-se com o símbolo:

$$\log_3 81 = 4,$$

que se lê: *o logaritmo de 81 na base 3 é 4.*

O quadro seguinte resume a nomenclatura dos dados e do resultado das três operações traduzidas por três igualdades equivalentes, onde se observa que **logaritmo** é sinônimo de expoente. O resultado de cada operação está destacado em negrita.

OPERAÇÃO	POTENCIAÇÃO $3^4 = 81$	RADICIAÇÃO $\sqrt[4]{81} = 3$	LOGARITMAÇÃO $\log_3 81 = 4$
Elementos {	3 - base 4 - expoente 81 - Potência	3 - Raiz 4 - índice 81 - radicando	3 - base 4 - Logaritmo , 81 - número ou anti-logaritmo

Conclui-se a definição:

Logaritmo de um número N em relação a uma base a , positiva e diferente de um, é o expoente a que se deve elevar a base, para obter o número N .

As igualdades:

$$a^x = N \quad \text{e} \quad \log_a N = x,$$

são pois equivalentes. *Exemplos:*

$$1.^{\circ}) \text{ Das igualdades: } \begin{cases} 3^4 = 81 \\ 4^{\frac{1}{2}} = 2 \\ 2^{-5} = \frac{1}{32} \end{cases} \quad \text{conclui-se: } \begin{cases} \log_3 81 = 4 \\ \log_4 2 = 1/2 \\ \log_2 \frac{1}{32} = -5. \end{cases}$$

2.º) Podemos escrever:

$$\log_4 64 = 3 \text{ porque } 4^3 = 64$$

$$\log_2 4 = 2 \text{ porque } 2^2 = 4.$$

OBSERVAÇÕES.

1.º) Quando a base é 10 omite-se o índice na notação dos logaritmos. Assim, a notação $\log 100$, significa o logaritmo de 100 na base 10 (subentendida) e é, portanto, 2.

2.º) As duas equações $a^x = N$ e $\log_a N = x$ são como sabemos, equivalentes. A primeira diz-se expressa em *forma exponencial* e a segunda em *forma logarítmica*.

2. Sistemas de logaritmos. Na igualdade $a^x = N$, que define os logaritmos, a base a é um número positivo, diferente de 1. Assim, o número N será positivo, qualquer que seja x , concluindo-se que só os números positivos têm logaritmos.

Ao conjunto dos números positivos e seus logaritmos numa base a dá-se o nome de *sistema de logaritmos* de base a .

Existe, então, uma infinidade de sistemas de logaritmos. O sistema de base 2, por exemplo, será constituído pelas potências de 2 e seus expoentes ou logaritmos:

N.os	1	2	4	8	16	32	64	128	256	512	1 024	2 048	...
Log.	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	...

Para dar, desde logo, uma idéia da vantagem da introdução dos logaritmos, consideremos a multiplicação:

$$32 \times 64 = 2^5 \times 2^6 = 2^{5+6} = 2^{11}$$

Ao expoente 11 (logaritmo), corresponde o número 2 048 e conclui-se $32 \times 64 = 2\,048$,

isto é, obtivemos o produto, efetuando a soma $5 + 6 = 11$, dos expoentes (logaritmos) e procurando o número correspon-

dente a 11 na tabela do sistema. A multiplicação fica substituída pela operação mais simples de adição. Adiante veremos todas as simplificações.

Apenas dois sistemas são usados:

- 1.º) o sistema de base 10, denominado sistema de logarítmos decimais, vulgares ou de Briggs.
- 2.º) o sistema cuja base é um número irracional que se representa pela letra e , cujo valor aproximado é 2,71828, com cinco decimais exatas, denominado sistema de logarítmos naturais, hiperbólicos ou neperianos (designação tirada do nome de John Napier, inventor dos logarítmos).

3. Variação dos logarítmos.

1.º) O logarítmo de um é zero. Realmente, qualquer que seja a base teremos:

$$\alpha^0 = 1 \quad \dots \quad \boxed{\log_{\alpha} 1 = 0.}$$

2.º) O logarítmo da base é um. Qualquer que seja α , temos:

$$\alpha^1 = \alpha \quad \dots \quad \boxed{\log_{\alpha} \alpha = 1}$$

3.º) Os logarítmos variam no mesmo sentido dos números, quando a base é maior que um (*).

$$\begin{aligned} \text{Suponhamos } \log_{\alpha} A &= a \\ \log_{\alpha} B &= b \quad \text{e } A > B \end{aligned} \quad (1)$$

Por definição teremos:

$$\begin{aligned} \alpha^a &= A \\ \alpha^b &= B \end{aligned}$$

logo, em virtude da hipótese (1): $\alpha^a > \alpha^b$

(*) No estudo da variação, consideraremos apenas o caso da base maior que um. Quando a base é menor que 1, os logarítmos variam no sentido contrário dos números.

Como α é maior que 1 conclui-se:

$$a > b \quad \text{ou} \quad \log_{\alpha} A > \log_{\alpha} B.$$

Conseqüências.

1.ª) Os números maiores que 1 têm logarítmos positivos.

Realmente, de

$$N > 1$$

Conclue-se:

$$\log_{\alpha} N > \log_{\alpha} 1 \quad \text{ou} \quad \boxed{\log_{\alpha} N > 0}$$

2.ª) Os números menores que 1 têm logarítmos negativos.

Se tivermos

$$N' < 1$$

concluiremos $\log_{\alpha} N' < \log_{\alpha} 1$ ou

$$\boxed{\log_{\alpha} N' < 0}$$

A variação pode ser resumida nos seguintes quadros:

base: $\alpha > 1$

base: $\alpha < 1$

N.º	0 $\nearrow$ 1 $\nearrow$ α $\nearrow$... $+\infty$
Log	$-\infty$ $\nearrow$ 0 $\nearrow$ 1 $\nearrow$... $+\infty$

N.º	0 $\nearrow$ α $\nearrow$ 1 $\nearrow$... $+\infty$
Log	$+\infty$ $\searrow$ 1 $\searrow$ 0 $\searrow$... $-\infty$

4. Propriedades operatórias dos logarítmos. Suponhamos x e y os logarítmos de a e b na base α , isto é:

$$(1) \begin{cases} \log_{\alpha} a = x \\ \log_{\alpha} b = y \end{cases} \quad \text{donde:} \quad (2) \begin{cases} a = \alpha^x \\ b = \alpha^y \end{cases}$$

De acôrdo com as regras de operações com potências, temos:

$$(3) \begin{cases} a \cdot b = \alpha^{x+y} \\ a : b = \alpha^{x-y} \\ a^m = \alpha^{mx} \\ \sqrt[m]{a} = \alpha^{\frac{x}{m}} \end{cases} \quad \text{donde:} \quad (4) \begin{cases} \log_{\alpha} (a \cdot b) = x + y \\ \log_{\alpha} (a : b) = x - y \\ \log_{\alpha} a^m = mx \\ \log_{\alpha} \sqrt[m]{a} = \frac{x}{m} \end{cases}$$

Finalmente, considerando os significados de x e y , dados nas igualdades (1), temos:

$$(5) \begin{cases} \log_{\alpha} (a \times b) = \log_{\alpha} a + \log_{\alpha} b \\ \log_{\alpha} (a : b) = \log_{\alpha} a - \log_{\alpha} b \\ \log_{\alpha} (a^m) = m \cdot \log_{\alpha} a \\ \log_{\alpha} \sqrt[m]{a} = \frac{\log_{\alpha} a}{m} \end{cases}$$

As igualdades (5) traduzem as quatro propriedades operatórias:

- 1.ª) O logaritmo de um produto é igual à soma dos logaritmos dos fatores.
- 2.ª) O logaritmo de um quociente é igual ao logaritmo do dividendo menos o logaritmo do divisor.
- 3.ª) O logaritmo de uma potência é igual ao produto do expoente pelo logaritmo da base.
- 4.ª) O logaritmo de uma raiz é igual ao logaritmo do radicando, dividido pelo índice da raiz.

OBSERVAÇÕES.

- 1.ª) As igualdades (3) e (5) e os períodos anteriores traduzem o mesmo fato em três linguagens. A primeira é a *exponencial*, a segunda, *logarítmica* e a terceira é a *linguagem vulgar*.
- 2.ª) No caso do produto, seria do mesmo modo demonstrada a propriedade para mais de dois fatores.

Exemplo:

Sendo dados: $\log 2 = 0,3010$ e $\log 3 = 0,4771$, calcular:

1.º) $\log 6$.

Pela primeira propriedade, temos:

$$\log 6 = \log (2 \times 3) = \log 2 + \log 3.$$

donde $\log 6 = 0,3010 + 0,4771$

$$\log 6 = 0,7781$$

2.º) $\log \frac{3}{2}$.

Pela segunda propriedade, temos:

$$\log \frac{3}{2} = \log 3 - \log 2 = 0,4771 - 0,3010.$$

$$\log \frac{3}{2} = 0,1761.$$

3.º) $\log 108$.

Decompondo 108 em fatores, obtemos:

$$\log 108 = \log (2^3 \times 3^3)$$

Aplicando a primeira e a terceira propriedades, vem:

$$\begin{aligned} \log 108 &= \log 2^3 + \log 3^3 \\ &= 3 \log 2 + 3 \log 3 \\ &= 3 \times 0,3010 + 3 \times 0,4771 \\ &= 0,9030 + 1,4313 \\ &= 2,3343. \end{aligned}$$

5. Característica e mantissa. Num sistema qualquer só as potências da base têm logaritmos inteiros. Assim, no sistema de base 2, teremos:

$$\log_2 32 = \log_2 2^5 = 5$$

$$\log_2 64 = 6.$$

Os números compreendidos entre 32 e 64 terão os logaritmos compreendidos entre 5 e 6. Para o número 43, por exemplo, teremos:

$$\log_2 43 = 5 + \text{fração}.$$

Os logaritmos dos números constam, então, de duas partes:

- uma parte inteira que se denomina **característica**;
- uma parte decimal fracionária, denominada **mantissa**.

6. Cologaritmo. Ao logaritmo do inverso de um número, dá-se o nome de **cologaritmo** do número. Assim:

$$\text{colog}_{\alpha} a = \log_{\alpha} \frac{1}{a} = \log_{\alpha} 1 - \log_{\alpha} a.$$

Como o logaritmo de 1 é sempre zero, resulta:

$$\text{colog}_{\alpha} a = -\log_{\alpha} a.$$

O cologaritmo é, portanto, **simétrico do logaritmo**.

Os cologarítmos aplicam-se para substituir as subtrações de logaritmos por adições, como, por exemplo, no cálculo:

$$\log \frac{3}{2} = \log 3 - \log 2 = \log 3 + \text{colog } 2.$$

Exemplo:

Exprimir o logaritmo da expressão $\frac{b^2 c^3}{\sqrt{a}}$, sendo dados os logaritmos de a , b e c .

Temos, em virtude das quatro propriedades:

$$\begin{aligned} \log \frac{b^2 c^3}{\sqrt{a}} &= \log b^2 + \log c^3 - \log \sqrt{a} \\ &= 2 \log b + 3 \log c - \frac{1}{2} \log a; \end{aligned}$$

ou, considerando o cologarítmo:

$$\log \frac{b^2 c^3}{\sqrt{a}} = 2 \log b + 3 \log c + \frac{1}{2} \text{colog } a.$$

7. Regra para o cálculo do logaritmo de um monômio. Observando-se o último exemplo do número anterior, conclui-se:

O logaritmo de um monômio obtém-se, adicionando os logaritmos dos fatores do numerador com os cologarítmos dos fatores do denominador, multiplicados pelos expoentes respectivos e divididos pelos índices, se houver.

EXERCÍCIOS

Dizer qual a base, qual o logaritmo e qual o antilogaritmo, escrevendo as igualdades em forma logarítmica:

1) $2^3 = 8$	4) $10^a = A$	7) $5^4 = 625$
2) $10^4 = 1\,000\,000$	5) $10^{-3} = 0,001$	8) $3^{-2} = \frac{1}{9}$
3) $10^{1,30} = 20$	6) $10^a = 1$	9) $x^a = b$

Escrever as seguintes igualdades sob forma exponencial (quando a base não é indicada subentende-se 10):

10) $\log_4 16 = 2$	13) $\log 3 = 0,477$	16) $\log 0,01 = -2$
11) $\log_2 2 = 1$	14) $\log_2 \frac{1}{8} = -3$	17) $\log_5 25 = 2$
12) $\log 1\,000 = 3$	15) $\log_3 81 = 4$	

18) Achar os logaritmos dos seguintes números na base 3:

a) 27 b) $\frac{1}{9}$ c) 1

19) Achar os logaritmos dos seguintes números na base 2:

8; 16; 1; $\frac{1}{4}$; $\frac{1}{32}$; $\frac{1}{2}$

20) Qual a base do sistema em que:

a) $\log 16 = 4$ c) $\log 81 = 4$ e) $\log 125 = 3$
b) $\log 4 = 1$ d) $\log 144 = 2$

Conhecidos: $\log 2 = 0,3010$ e $\log 3 = 0,4771$; calcular:

21) $\log 8$	25) $\log \frac{4}{9}$	29) $\log \frac{\sqrt{243}}{\sqrt{81}}$
22) $\log \sqrt{3}$	26) $\log 0,12$	30) $\log \frac{\sqrt[4]{36}}{4}$
23) $\log \sqrt[3]{128}$	27) $\log 14,4$	31) $\log \frac{\sqrt[3]{3}}{\sqrt{2}}$
24) $\log \sqrt[5]{48}$	28) $\log (16,2 \times 64)$	

Exprimir os logaritmos das fórmulas:

32) $S = \pi r^2$	35) $x = \sqrt[3]{\frac{a^2 b}{c}}$
33) $S = \frac{l^2 \sqrt{3}}{4}$	36) $x = \frac{a^2 \sqrt[3]{b}}{\sqrt{c}}$
34) $V = \frac{\pi r^2 h}{3}$	

II) LOGARÍTMOS DECIMAIS

8. Propriedades.

1.ª)

A característica do logaritmo decimal de um número maior que um é uma unidade menor que o número de algarismo de sua parte inteira.

Demonstração.

Um número com 2 algarismos na parte inteira fica compreendido entre 10 e 100, ou; 10^1 e 10^2 . Um número com 3 algarismos fica compreendido entre 100 e 1 000, ou, 10^2 e 10^3 , e, assim por diante.

De modo geral, um número N com n algarismos na parte inteira ficará compreendido entre 10^{n-1} e 10^n .

Podemos, pois, escrever:

$$10^{n-1} < N < 10^n.$$

Considerando os logaritmos na base 10, virá:

$$n-1 < \log N < n,$$

isto é: $\log N = (n-1) + \text{fração}.$

A característica é, pois, $n-1$.

Exemplo:

As características de

$\log 584$; $\log 8,501$; $\log 27,432$; $\log 5\,873$.

são: 2, 0, 1 e 3

2.^a)

A característica do logaritmo decimal de um número positivo menor que 1 é negativa e tem tantas unidades quantos zeros precederem seu primeiro algarismo significativo.

Demonstração:

Um número decimal, cujo primeiro algarismo significativo é de centésimos, isto é, que tem 2 zeros precedendo o primeiro algarismo significativo como, por exemplo, 0,032, é maior que 0,01 e menor que 0,1, e, portanto, fica compreendido entre 10^{-2} e 10^{-1} .

Um número decimal com três zeros precedendo o primeiro algarismo significativo, como 0,0081 será maior que 0,001 e menor que 0,01 e ficará compreendido entre 10^{-3} e 10^{-2} .

De modo geral, um número decimal N , com n zeros precedendo o primeiro algarismo significativo ficará com-

preendido entre 10^{-n} e $10^{-(n-1)}$ e, portanto, poderemos escrever:

$$10^{-n} < N < 10^{-(n-1)}$$

Tomando os logaritmos na base 10, virá:

$$-n < \log N < -(n-1),$$

isto é: $\log N = -n + \text{fração (mantissa)}.$

A característica é, pois, $-n$

Exemplo:

As características de

$\log 0,4$; $\log 0,0581$; $\log 0,0027$; $\log 0,8705$

são: -1 , -2 , -3 e -1 .

3.^a)

Quando se multiplica ou divide um número por uma potência de 10, a mantissa de seu logaritmo decimal não se altera.

Demonstração.

Representemos por c a característica e por m a mantissa do logaritmo de um número a , isto é:

$$\log a = c, m. \quad (1)$$

De acordo com a segunda e terceira propriedades, teremos:

$$\log (a \times 10^p) = \log a + p \log 10$$

$$\log (a : 10^p) = \log a - p \log 10$$

ou, de acordo com a hipótese (1):

$$\log (a \times 10^p) = c, m + p$$

$$\log (a : 10^p) = c, m - p$$

Como p é inteiro deve ser adicionado ou subtraído da parte inteira c e teremos:

$$\log (a \times 10^p) = (c + p), m$$

$$\log (a : 10^p) = (c - p), m$$

Assim, a mantissa mantém-se com o valor m , enquanto que a característica fica *aumentada* ou *diminuída* do expoente da potência.

Exemplo:

$$\begin{aligned} \text{Sendo} \quad \log 327 &= 2,5145 \\ \text{conclui-se: } \log 3,27 &= 2,5145 - 2 = 0,5145 \\ \log 327\,000 &= 2,5145 + 3 = 5,5145. \end{aligned}$$

Consequência:

A mantissa do logaritmo de um número decimal, no sistema de base 10, é independente da posição da vírgula.

9. Logaritmo preparado e logaritmo negativo. Em virtude das duas primeiras propriedades, é desnecessário formar uma tábua ou tabelar as características dos logaritmos decimais, pois as mesmas podem ser obtidas à simples vista dos números.

Dêse modo, as tábuas contêm somente as mantissas dos logaritmos dos números inteiros.

Com o objetivo de assegurar esta vantagem (tabelar somente as mantissas dos inteiros) é conveniente conservar a mantissa sempre positiva. Assim, sendo, por exemplo,

$$\log 2 = 0,3010$$

teremos, em virtude da terceira propriedade:

$$\log 0,002 = 0,3010 - 3,$$

e, se efetuarmos a soma algébrica, obteremos um *logaritmo negativo*. Convenciona-se, então, deixar indicada a soma, escrevendo-se o sinal menos acima da característica, para indicar que apenas ela é negativa, isto é, escreve-se:

$$\log 0,002 = \bar{3},3010.$$

Ao logaritmo escrito com esta convenção denomina-se *logaritmo preparado*.

Convém fixar que o logaritmo preparado $\bar{3},3010$ é equivalente a $-3 + 0,3010$ e deve ser distinguido do *logaritmo*

negativo $-3,1010$, no qual a característica e a mantissa são ambas negativas.

Surtem, daí, os dois problemas de transformação do logaritmo preparado em negativo e reciprocamente.

a) Transformação do logaritmo preparado em negativo. Exemplo.

$$\text{Seja} \quad \log 0,002 = \bar{3},3010,$$

que se quer transformar. Temos em virtude da convenção:

$$\bar{3},3010 = -3 + 0,3010$$

Efetuada a adição vem:

$$\log 0,002 = -2,6990$$

Assim, a transformação obtém-se efetuando a adição indicada.

b) Transformação do logaritmo negativo em preparado. Exemplo.

$$\text{Seja o logaritmo negativo } -3,9867.$$

Podemos escrever:

$$-3,9867 = -3 - 0,9867.$$

Somando e subtraindo uma unidade, têm-se:

$$-3,9867 = (-3 - 1) + (1 - 0,9867) = -4 + 0,0133,$$

$$\text{donde finalmente: } -3,9867 = \bar{4},0133.$$

10. Regra para achar o cologaritmo. Consideremos o logaritmo:

$$\log a = 3,5170.$$

Por definição (n.º 6), teremos:

$$\text{colog } a = -3,5170 = -3 - 0,5170$$

Subtraindo e somando uma unidade, o que não lhe altera o valor, vem:

$$\text{colog } a = -3 - 1 + 1 - 0,5170 = -(3 + 1) + (1 - 0,5170) \quad (1)$$

$$\text{donde, finalmente: } \text{colog } a = \bar{4},4830.$$

Observando a expressão (1), conclui-se a regra:

- 1) A característica do cologarítmo obtém-se somando + 1 à característica do logarítmo e trocando o sinal do resultado.
- 2) Para obter a mantissa do cologarítmo subtrai-se de nove cada algarismo da mantissa dada, exceto o último algarismo significativo à direita que se subtrai de 10.

OBSERVAÇÃO. A regra é a mesma para obter o logarítmo, dado o cologarítmo.

Exemplos.

- 1.º) Se $\log x = 3,8171$, conclui-se: $\text{colog } x = \overline{4},1829$.
- 2.º) Se $\log y = \overline{4},3010$, conclui-se: $\text{colog } y = 3,6990$.

II. Operações com logarítmos (*).

a) Adição.

Para efetuar a adição de vários logarítmos, adicionam-se as mantissas, e as reservas positivas, se as houver, adicionam-se à soma algébrica das características

Exemplo:

Seja a adição: $\overline{3},5847 + 2,8010 + \overline{4},9897$.

Disposição do cálculo:

$$\begin{array}{r} \overline{3},5847 \\ 2,8010 \\ \overline{4},9897 \\ \hline \overline{5},3754 \end{array}$$

As duas unidades positivas de reserva da soma das mantissas foram adicionadas à soma algébrica das características, obtendo-se:

$$+ 2 - 3 + 2 - 4 = - 3.$$

(*) A subtração de logarítmos não se efetua, pois é substituída pela adição do cologarítmo.

b) Multiplicação.

PRIMEIRO CASO. A multiplicação de um logarítmo positivo por um número inteiro procede-se de acôrdo com a regra conhecida da multiplicação de decimais.

Exemplo: $3,4771 \times 4 = 13,9084$.

SEGUNDO CASO.

A multiplicação de um logarítmo preparado por um número inteiro efetua-se, multiplicando, separadamente, a mantissa e a característica pelo inteiro, e adicionando os resultados.

Exemplo:

Seja efetuar a multiplicação $\overline{2},4011 \times 13$.

Temos: $0,4011 \times 13 = 5,2143$

e

$$- 2 \times 13 = - 26$$

Adicionando os resultados, vem:

$$\overline{2},4011 \times 13 = \overline{21},2143.$$

OBSERVAÇÕES.

- 1.º) Quando o multiplicador tem apenas um algarismo, não é necessário efetuar as duas multiplicações destacadas, podendo-se manter as reservas de memória, como no exemplo:

$$\overline{4},8627 \times 2 = \overline{7},7254$$

A unidade de reserva da mantissa, mantém-se de memória e diz-se:

$$- 4 \times 2 = - 8, \text{ mais } 1, - 7$$

- 2.º) A multiplicação de dois logarítmos não ocorre no cálculo.

c) Divisão

A divisão de um logarítmo positivo por um inteiro procede-se como na divisão de decimais.

Excluída esta hipótese podemos, então, considerar três casos de divisão de logarítmos preparados.

PRIMEIRO CASO. *A característica do logarítmo preparado é divisível pelo inteiro.*

Efetuem-se, separadamente, as divisões da característica e da mantissa pelo inteiro.

Exemplo :

Seja dividir $\bar{6},4836$ por 3.

Dividindo-se a característica por 3, obtém-se -2.

Dividindo a mantissa por 3, obtém-se 0,1612.

Assim, temos: $\bar{6},4836 : 3 = \bar{2},1612$.

SEGUNDO CASO. *A característica não é divisível pelo inteiro.*

Adiciona-se à característica o menor número de unidades negativas necessárias para obter um número divisível pelo inteiro. Adiciona-se número igual de unidades positivas à mantissa a fim de não alterar o logarítmo.
Em seguida, dividem-se, separadamente, os resultados obtidos pelo inteiro.

Exemplo :

Seja dividir por 5 o logarítmo $\bar{2},4825$.

Soma-se -3 à característica e obtém-se:

$$(-2-3) : 5 = -5 : 5 = -1$$

A característica do quociente é -1.

Somando 3 à mantissa obtém-se:

$$3,4825 : 5 = 0,6965.$$

Tem-se, então o quociente:

$$\bar{2},4925 : 5 = \bar{1},6965.$$

OBSERVAÇÃO. Na prática, a adição das unidades à característica e à mantissa faz-se mentalmente.

TERCEIRO CASO. *Divisão de um logarítmo por outro.*

Se um dos logaritmos ou ambos forem preparados, transformam-se previamente em logaritmos negativos e efetua-se a divisão da forma vulgar.

Exemplo :

Seja dividir $\bar{3},4850$ por $\bar{1},3010$.

Temos:

$$\bar{3},4850 : \bar{1},3010 = (-2,5150) : (-0,6990) = 3,5 \text{ (aprox.)}$$

12. Tábuas de logaritmos. Disposição. As tábuas ou tabelas de logaritmos contêm apenas as mantissas dos logaritmos dos números inteiros, com 4, 5, 7 e mais algarismos de ordem decimal.

Anexa ao volume encontra-se, em cartolina, uma tábua de logaritmos de 4 decimais, contendo os números inferiores a 1 000.

As mantissas dos logaritmos dos números de um algarismo, como 1, 2, 3, etc. são encontrados em 10, 20, 30, etc., de acôrdo com a terceira propriedade dos logaritmos decimais.

Julgamos suficiente uma tábua de quatro decimais para as aplicações do Curso Secundário.

13. Achar na tábua o logarítmo de um número dado.

PRIMEIRO CASO: *O número está na tábua, isto é, é menor que 1 000.*

Neste caso lemos os dois primeiros algarismos do número na coluna *N* e o terceiro na linha *N*; a mantissa será lida no cruzamento da linha com a coluna.

Primeiro exemplo :

Achar o logarítmo de 253.

Lemos 25 na coluna *N*, no quarto grupo de números e o algarismo 3 na linha *N*. No cruzamento encontramos a mantissa 4 116.

Como a característica é 2 (n.º 8), concluímos:

$$\log 258 = 2,4116.$$

Segundo exemplo.

Achar o logaritmo de 84.

Procuramos 84 na coluna *N* e o algarismo 0 na linha *N*, pois a mantissa de 84 é a mesma de 840 (terceira propriedade). No cruzamento lemos a mantissa 9 243 e concluímos:

$$\log 84 = 1,9243.$$

Terceiro exemplo:

Achar o logaritmo de 0,0437.

A característica é -2 (n.º 8). A mantissa é a mesma de 437 (terceira propriedade) Logo, vem:

$$\log 0,0437 = \bar{2},6405.$$

SEGUNDO CASO. O número não está na tábua, isto é, é maior que 1 000.

Neste caso, a mantissa é calculada considerando-se que quando a diferença entre dois números é pequena em relação aos mesmos, a diferença entre os logaritmos é aproximadamente proporcional à diferença entre os números.

Primeiro exemplo:

Achar o logaritmo de 4 787.

Como a mantissa é a mesma qualquer que seja a posição da vírgula, consideramos o número 478,7, compreendido entre 478 e 479 que estão na tábua e teremos:

$$\begin{array}{r} \text{mantissa de 478.....} 6\ 794 \\ \text{mantissa de 479.....} 6\ 803 \\ \hline \text{diferença} = 1; \text{ diferença} = 9 \end{array}$$

Assim, como a diferença entre 478 e 478,7 é 0,7, formamos a regra de três:

se o n.º aumenta 1 a mantissa aumenta 9

logo, se o n.º aumentar 0,7 a mantissa aumentará x , donde:

$$x = 9 \times 0,7 = 6,3 \simeq 6.$$

A mantissa será:

$$6\ 794 + 6 = 6\ 800,$$

e conclui-se: $\log 4787 = 3,6800$

Dispositivo prático. O resultado da regra de três encontra-se calculado para os décimos de 1 a 9 sob o título **partes proporcionais**. Assim, na coluna correspondente a 7 décimos lemos, na linha 47, o acréscimo 6, podendo ser usado o dispositivo:

$$\begin{array}{r} \text{mantissa de 478..} 6794 \\ \text{dif. para ...} 0,7 \quad 6 \\ \hline \log 4\ 787 = 3,6800 \end{array}$$

Segundo exemplo:

Achar $\log 98,538$.

Para achar a mantissa, desprezamos a vírgula (terceira propriedade) e utilizamos as partes proporcionais para os décimos e os centésimos do número 985,38, com o seguinte dispositivo:

$$\begin{array}{r} \text{mantissa de.. 985.....} 9934 \\ \text{dif. para.....} 0,3.... \quad 1 \\ \text{dif. para.....} 0,08... \quad 0,4 \\ \hline \log 98,538 = 1,9935 \end{array}$$

OBSERVAÇÃO. Desprezam-se os 4 décimos de mantissa. Se tivéssemos 5 ou mais décimos de mantissa, forçaríamos o algarismo conservado.

14. Achar o número, dado o logaritmo.

PRIMEIRO CASO: O logaritmo dado está na tábua.

Exemplo:

Sendo $\log x = 1,8710$, achar x .

Procuramos a mantissa 8 710 e, a encontramos no quarto grupo de números da segunda página.

Na coluna *N* e na linha de 8 710 encontramos 74 e na cabeça da coluna em que está 8 710 encontramos o algarismo 3. Escrevemos, então, o número 743 e colocamos a vírgula de acôrdo com a característica, isto é, o número tem **dois** algarismos na parte inteira. Concluímos:

$$x = 74,3 \text{ ou antilog } 1,8710 = 74,3.$$

SEGUNDO CASO: O logaritmo dado não está na tábua.*Exemplo:*Dado $\log a = \bar{2},8404$, achar a .

Procuramos a mantissa 8 404. Não é encontrada, mas lemos as mantissas 8 401 e 8 407, entre as quais ela fica compreendida, na décima quinta linha da segunda página.

De acôrdo com o primeiro caso, escrevemos:

à mantissa 8 401 corresponde o n.º 692

à mantissa 8 407 corresponde o n.º 693

diferença = 6 diferença = 1.

A diferença entre a mantissa menor (8 401) e a dada (8 404) é 3; assim, temos a regra de três:

ao acréscimo 6 da mantissa corresponde 1 no número,

ao acréscimo 3 da mantissa corresponderá x no número,donde: $x = 3 : 6 = 0,5$.

Assim, o número correspondente à mantissa dada é:

$$692 + 0,5 = 692,5.$$

Considerando a característica $\bar{2}$, temos, finalmente:

$$a = 0,06925.$$

Dispositivo prático:

para.....	8 401...	692	3 : 6 = 0,5.
para dif.....	3...	0,5	
	<u>a</u>	<u>= 0,06925</u>	

OBSERVAÇÃO. Podemos utilizar as partes proporcionais, procurando a diferença 3 na linha da mantissa 8 401 e lendo na cabeça da coluna os 5 décimos correspondentes; evita-se assim a divisão ($3 : 6 = 0,5$).

15. Cálculo de expressões por logaritmos. Uma expressão diz-se *logarítmica* isto é, calculável por logaritmos, quando as operações nela existentes são multiplicações, divisões, potenciações e radiciações.

Exemplos:

1.ª) Calcular a raiz quinta de 0,7893.

Representemos por x o valor da raiz procurada, isto é:

$$x = \sqrt[5]{0,7893}$$

Teremos (quarta propriedade operatória):

$$\log x = \frac{\log 0,7893}{5} = \frac{\bar{1},8973}{5}$$

donde: $\log x = \bar{1},9794$ e $x = 0,9536$.2.ª) Calcular o valor da expressão: $\frac{547,8 \times \sqrt{0,396}}{251}$

O cálculo da expressão faz-se pela regra n.º 7, sendo, na prática, as parcelas dispostas em coluna. Os cálculos auxiliares, para obter os valores das parcelas, acham-se destacados à direita.

Dispositivo prático:

CÁLCULO DEFINITIVO	CÁLCULO AUXILIAR
$\log 547,8 = 2,7386$	1) mantissa de 547..... 7 380
$\frac{1}{2}\log 0,396 = \bar{1},7988$	dif. para 0,8... 6
$\text{colog } 251 = \bar{3},6003$	$\log 547,8 = 2,7386$
$\log E = 0,1377$	2) $\log 0,396 = \bar{1},5977$
para 1 367..... 137	$\bar{1},5977 : 2 = \bar{1},7988$
para dif. 10..... 0,3	3) $\log 251 = 2,3997$
<u>$E = 1,373$</u>	$\text{colog } 251 = \bar{3},6003$

16. Mudança de base. Mudança de base é o problema que consiste em determinar os logaritmos dos números na base b , sendo conhecidos e tabelados os logaritmos dos mesmos números no sistema de base a .

Seja N um número qualquer, cujo logaritmo na base b queremos achar. Representemos por x , o logaritmo procurado. Teremos:

$$b^x = N$$

Tomando os logaritmos dos dois membros no sistema conhecido (base a), vem:

$$x \cdot \log_a b = \log_a N$$

e, finalmente:

$$x = \log_a N \cdot \frac{1}{\log_a b} \quad (1).$$

Conclui-se:

Para passar os logaritmos do sistema de base a para o de base b , multiplicamos os primeiros pela constante $\frac{1}{\log_a b}$.

OBSERVAÇÕES.

1.ª) A constante $\frac{1}{\log_a b}$ denomina-se **módulo relativo** do sistema de base b em relação ao de base a .

2.ª) O módulo de um sistema em relação ao sistema neperiano (símbolo l) denomina-se **módulo absoluto**.

Assim, o módulo absoluto do sistema decimal será:

$$M = \frac{1}{l10} = \frac{1}{2,3026}$$

donde

$$M = 0,4342.$$

Conclui-se: para passar os logaritmos do sistema neperiano para o decimal, basta multiplicar os primeiros por 0,4342.

Exemplo.

Calcular $\log_{49} 343$.

O módulo relativo do sistema de base 49 em relação ao decimal será:

$$m = \frac{1}{\log 49} = \frac{1}{1,6902}$$

Logo temos:

$$\log_{49} 343 = \frac{\log 343}{1,6902} = \frac{2,5353}{1,6902}$$

$$\log_{49} 343 = \frac{3}{2}$$

EXERCÍCIOS

Achar os logaritmos dos seguintes números.

1) 485	4) 5 829	7) 0,01487
2) 689	5) 34 897	8) 0,2389
3) 4 231	6) 236 987	9) 0,097148

Achar os antilogaritmos de:

10) 2,5717	12) 3,9901	14) 2,4842
11) 1,7623	13) 3,2274	15) 0,8503

Achar os cologarítmos de:

16) 258	19) 34,76	22) 0,008574
17) 7 865	20) 2,9836	23) 756,8
18) 32 698	21) 0,2748	24) 0,01348

Achar os números cujos cologarítmos são:

25) 2,5528	27) 1,8321	29) 1,3186
26) 0,0158	28) 3,1895	30) 0,0048

Transformar em logaritmos negativos:

31) 3,5229	32) 1,6989	33) 2,4771
------------	------------	------------

Transformar em logaritmos preparados:

34) -2,5801	35) -2,4771	36) -0,3010
-------------	-------------	-------------

Efetuar as operações:

37) $3,4142 + 1,3642 + 2,1518$	42) $3,1820 \div 5$
38) $3 \times 2,4771 + 2 \times 1,8780$	43) $3,4180 \div 1,3010$
39) $3,5162 \div 2$	44) $2,9798 \div 1,5028$
40) $\frac{3}{2} \times 2,8788$	45) $0,3084 \div 1,1011$
41) $1,6991 + \frac{3}{2}$	46) $\frac{1}{3} \times 2,5058 + 2 \times 1,7348$

Calcular, por logaritmos:

47) $52,84 \times 352,7$	54) $\sqrt[4]{\frac{427 \times 37 000}{341^2}}$
48) $318,9 : 27,531$	55) $\frac{4}{3} \pi \times (0,51)^2$
49) $(13,583)^2$	56) $(0,45)^2 \cdot \pi$
50) $-3,845 \times 1 230 \times 0,387$	57) $\frac{\pi \times (0,45)^2 \times 4,61}{3}$
51) $3,27 \times \frac{2,81}{5,48}$	58) $\pi \cdot (5,2)^2 \times 4,81$
52) $45 \sqrt[3]{0,383}$	
53) $\sqrt[4]{82,37} : \sqrt[3]{5,832}$	

- 59) Calcular o décimo quinto termo de uma progressão geométrica, cujo primeiro termo é 5 e a razão 4. *Resp.*: 134 400 000 (ap.)
- 60) Calcular a razão de uma progressão geométrica, cujo primeiro termo é 2 e o nono, 781250. *Resp.*: 5.
- 61) Calcular o número de termos de uma p. g. onde o primeiro é 2, o último 486 e a razão 3. *Resp.*: 6.
- 62) Calcular a área de um hexágono regular, cujo lado tem 0,35 m (fórmula: $\frac{3}{2} \cdot l^2 \cdot \sqrt{3}$). *Resp.*: 0,1114 m².
- 63) Calcular o volume de uma esfera, cujo diâmetro mede 2,36 cm (fórmula: $\frac{1}{6} \pi d^3$). *Resp.*: 5,465 cm³.
- 64) Calcular por log.:

$$x = \frac{0,47985 \times \sqrt[3]{8,394}}{10^4 \times \sqrt[4]{0,0007}} \quad (\text{E. Naval})$$

Resp.: 0,1023.

- 65) Sendo:

$$N = \left(\frac{125}{128}\right)^{\frac{53}{74}}$$

calcular, sem emprêgo de tábuas, o log de N.

Dá-se: $\log 2 = 0,30103$ *Resp.*: 1,9925. (E. N. E., 1945)

- 66) Sendo $\log 20 = 1,30103$, calcular $\log (0,08)^{1/8}$ (E. T. E., 1945). *Resp.*: 1,86288.

- 67) Sendo $\log 0,35 = 1,5441$ e $\log 0,7^8 = 2,7608$, achar, sem tábua, o de $\sqrt[5]{0,25}$. (E. T. E., 1946). *Resp.*: 1,8796.

- 68) Determinar a expressão M, cujo desenvolvimento logarítmico é:

$$\begin{aligned} a) \log M &= 2 \log a + 3 \log b; & c) \log M &= \frac{2}{3} \log a - 3 \log b; \\ b) \log M &= \frac{1}{3} \log a - 2 \log b; & d) \log M &= \log a + \frac{2}{3} \log b. \end{aligned}$$

Resolver as equações:

- 69) $\log (3x^2 - 17x + 2) + \text{colog} (x^2 - 6x + 1) = \log 2$. *Resp.*: $x = 0$ e 5.
- 70) $2 \log x = 1 + \log (2,4 - x)$ (E. T. E., 1947). *Resp.*: 2
- 71) $\log \sqrt{5x+1} + \log \sqrt{7x+4} = 1 + \log 2$ (E. T. E., 1947) *Resp.*: 3.
- 72) $\log \sqrt{7x+3} + \log \sqrt{4x+5} = \frac{1}{2} + \log 3$ (E. Aer., 1943). *Resp.*: 1.

Determinar os logaritmos dos números seguintes no sistema de base 7:

73) 35

74) $\frac{25}{49}$

75) 2 401

Determinar o módulo do sistema neperiano em relação ao decimal. os logaritmos neperianos dos seguintes números:

76) 29 77) 381 78) 8,42

- 79) Achar o logaritmo de 12 no sistema de base 3. *Resp.*: 2,26.
- 80) Determinar o módulo, relativo ao decimal, do sistema de base 12 e determinar nesse sistema o logaritmo de 100. *Resp.*: 0,927 e 1,854

{ Resolver os sistemas:

$$81) \begin{cases} \log x + \log y = 2 \\ 3x - 5y = 55 \end{cases} \quad \text{Resp.: } 25 \text{ e } 4.$$

$$82) \begin{cases} \log x - \log y = \log y \\ 3x + 2y = 33 \end{cases} \quad \text{Resp.: } 9 \text{ e } 3.$$

- 83) Achar o número x, tal que o dôbro de seu logaritmo decimal ultrapasse de 2 unidades o logaritmo decimal de x - 9. (E. Eng. Juiz de Fora, 1951). *Resp.*: 10 e 90.

84) Dada a expressão:
$$N = \frac{1,25 \sqrt[3]{62,5}}{(0,04)^5}$$

calcular o logaritmo decimal de N, sabendo-se que $\log 0,5 = 1,698 97$. (E. N. de Eng., 1948). *Resp.*: 7,68524.

- 85) Se as raízes a e b da equação $x^2 - px + B^a = 0$ são reais e positivas demonstrar que: $\log_{B^a} a + \log_{B^a} b + \log_{B^b} a + \log_{B^b} b = np$. (E. E. da U. Minas Gerais, 1947).

- 86) Dados $a = 2,8$; $b = 0,025$; $c = 4,86$; $\log 2 = 0,30103$ e $\log 7 = 0,84510$ calcular $\text{colog } x$, sendo:

$$x = \frac{a^2 \sqrt[3]{b}}{c + 2}$$

(E. N. de Eng., 1950) *Resp.*: 1,52397

- 87) Dados, no sistema de base 10: $\log 3 = 0,47712$ e $\log 2 = 0,30103$, calcular na base e:

$$\log \left[\left(\frac{25}{9} \right)^{\frac{1}{5}} \right]$$

(E. N. Química) *Resp.*: 0,6130

- 88) Na fórmula $\frac{4\pi R^2 h}{L} = 12,87$ são dados: $\pi = 3,14$; $h = 72,46$; $L = 0,715$.

Calcular R com auxílio dos logaritmos a 4 decimais. (E. N. Arquitetura) *Resp.*: 0,1006.

- 89) Calcular, com o auxílio de logaritmos, o valor de V dado pela fórmula abaixo em que: $a = 0,5781$; $b = 81,48$; $c = 23,94$; $\pi = 3,14$. Achar também o logaritmo neperiano de V. (E. Nac. Arq.) $V = (\pi \sqrt{ab^3} : c^2 \sqrt{3})$ *Resp.*: 1,769 e 0,5740.

- 90) Resolver: $\log x + \log y = 3$; $5x^2 - 3y^2 = 6 125$ (Escola Nacional de Agronomia, 1950). *Resp.*: 40 e 25 (Cecil Thiré-Ex. Álgebra).

III) EQUAÇÕES EXPONENCIAIS

(Curso Científico)

17. Definição.

Equação exponencial é a equação em que a incógnita figura em expoente.

Exemplos: $3^x = 9$; $2^{x^2} = 64$; $3^x + 2^x - 3 = 4$.

Quando a incógnita figura em segundo expoente, a exponencial diz-se de segunda ordem e assim por diante.

Exemplo:

A equação $3^{2x} = 81$ é uma exponencial de 2.ª ordem.

18. Resolução da equação de primeira ordem $a^x = b$.

PRIMEIRO CASO. *a e b são potências da mesma base.*

Neste caso a solução é imediata.

Primeiro exemplo:

$$3^x = 81.$$

Como 81 é a quarta potência de 3, vem:

$$3^x = 3^4 \quad \therefore \quad x = 4.$$

Segundo exemplo:

$$9^x - 1 = 81.$$

Substituindo 9 e 81 que são potências de 3:

$$3^{2(x-1)} = 3^4,$$

logo, conclui-se: $2(x-1) = 4$ e $x = 3$.

SEGUNDO CASO: *a e b são quaisquer.*

A equação resolve-se por logaritmos o que dá:

$$x \log a = \log b$$

$$x = \frac{\log b}{\log a}.$$

Primeiro exemplo:

Resolver $3^x = 6$

Temos: $x \log 3 = \log 6$

$$x = \frac{\log 6}{\log 3} = \frac{0,7782}{0,4771} = 1,63.$$

Segundo exemplo:

Resolver $10^{2x-1} = 5$.

Temos: $(2x-1) \cdot \log 10 = \log 5$

Como $\log 10$ é 1:

$$2x - 1 = 0,6990$$

$$x = \frac{0,6990 + 1}{2} = 0,8495.$$

Terceiro exemplo:

Resolver $9^{x^2-2x+1} = 675$.

Temos: $(x^2 - 2x + 1) \cdot \log 9 = \log 675$.

Donde: $x^2 - 2x + 1 = \frac{\log 675}{\log 9} = 2,96$.

Daí, a equação do segundo grau:

$$x^2 - 2x - 1,96 = 0,$$

cujas raízes dão os valores aproximados de x :

$$x' = 2,7 \quad \text{e} \quad x'' = -0,7.$$

Quarto exemplo:

Resolver $2^{4x} \cdot 3^{2x} = 432$.

Tomando os logaritmos;

$$4x \cdot \log 2 + 2x \cdot \log 3 = \log 432.$$

donde: $(4 \log 2 + 2 \log 3) x = \log 432$.

e, portanto

$$x = \frac{\log 432}{4 \log 2 + 2 \log 3} = \frac{2,6355}{4 \times 0,3010 + 2 \times 0,4771}$$

Feitas as operações, obteremos: $x \approx 1,2$.

19. Equação exponencial de segunda ordem. Seja a exponencial $3^{2x} = 81$.

Façamos: $2^x = y$ (1)

Substituindo na equação dada, resultará a de primeira ordem:

$$3^y = 81 \quad \therefore y = 4$$

Levando o valor de y em (1) obteremos nova equação de primeira ordem:

$$2^x = 4 \quad \therefore x = 2.$$

OBSERVAÇÃO. De modo análogo resolveremos as de terceira ordem, quarta etc., por reduções sucessivas às ordens inferiores.

20. Equação exponencial do tipo $a \cdot \alpha^{2x} + b \cdot \alpha^x + c = 0$. Observemos que um expoente é duplo do outro. Assim, se fizermos:

$$\alpha^x = y \quad (1) \quad \therefore \alpha^{2x} = y^2,$$

obteremos a equação do segundo grau em y :

$$ay^2 + by + c = 0. \quad (2)$$

A equação (2) dará o valor de y que, substituído em (1), fornece uma equação exponencial do primeiro tipo.

Exemplo:

Resolver: $7^{2x} - 8 \cdot 7^x + 7 = 0$.

Façamos: $7^x = y$ (1) $\therefore 7^{2x} = y^2$

Substituindo na equação dada, vem:

$$y^2 - 8y + 7 = 0.$$

A equação do segundo grau dá:

$$y = 4 \pm \sqrt{16 - 7} \quad \therefore y' = 7 \quad \text{e} \quad y'' = 1.$$

Substituindo em (1) teremos as duas soluções:

$$\begin{array}{l|l} 7^x = 7 & 7^x = 1 \\ \therefore x = 1 & \therefore x = 0. \end{array}$$

21. Equação onde, nos expoentes incógnitos, figuram adições e subtrações. Consideremos a equação:

$$3^{x+1} - 3^{3-x} = 80.$$

A adição de expoentes resulta da multiplicação de potências da mesma base; logo, podemos escrever:

$$3^{x+1} = 3 \cdot 3^x$$

Analogamente a subtração de expoentes resulta da divisão

e teremos: $3^{3-x} = \frac{3^3}{3^x} = \frac{27}{3^x}.$

Assim, a equação dada pode escrever-se:

$$3 \cdot 3^x - \frac{27}{3^x} = 80.$$

Façamos: $3^x = y$ (1)

e eliminados os denominadores, resulta a equação do segundo grau:

$$3y^2 - 80y - 27 = 0,$$

cujas raízes são:

$$y' = 27 \quad \text{e} \quad y'' = -\frac{1}{3}.$$

Como à equação (1) só convêm valores positivos de y , teremos a única solução:

$$3^x = 27 \quad \therefore x = 3.$$

22. Equações onde figuram índices incógnitos. Podemos transformar os radicais em potências de expoentes fracionários ou aplicar, quando possível, diretamente, as propriedades dos logaritmos.

Exemplo:

Resolver $\sqrt{x} \cdot \sqrt{x-1} = 4.$

Aplicando a propriedade da raiz, vem:

$$\frac{2 \log 2}{x} + \frac{\log 2}{x-1} = 2 \log 2.$$

Simplificando $\log 2$, resulta a equação:

$$\frac{2}{x} + \frac{1}{x-1} = 2,$$

cuja raízes são: $x' = 2$ e $x'' = 0,5$.

EXERCÍCIOS

Resolver as equações:

- | | |
|--|---|
| 1. $2^x = 16$ Resp.: 4 | 12. $7^x = 147$ Resp.: 2,6 |
| 2. $3^{2x-1} = 27$ Resp.: 3 | 13. $3^{x-1} = 4^{x+1}$ Resp.: -8,6 |
| 3. $a^x = \sqrt[5]{a^2}$ Resp.: $\frac{2}{5}$ | 14. $31^{5x-15} = 1$ Resp.: 3 |
| 4. $2^x = \frac{1}{4}$ Resp.: -2 | 15. $5^{x^2-7x+10} = 625$ Resp.: 1 e 6 |
| 5. $12^{3x+1} = 7^{x-1}$ Resp.: -0,8 | 16. $x \cdot \log a = \log \sqrt[3]{a}$ Resp.: $\frac{1}{3}$ |
| 6. $2^{3x} \cdot 3^{2x} = 5184$ Resp.: 2 | 17. $2^{2x} - 5 \cdot 2^x + 4 = 0$ Resp.: 0 e 2 |
| 7. $7 \cdot 7^{2x} - 340 \cdot 7^x = 147$
Resp.: 2 | 18. $3^x + 2 \cdot 3^{1-x} = 7$ Resp.: 0 e 1,6 |
| 8. $3 \cdot 4^x - 7 \cdot 2^x + 4 = 0$ Resp.: 0 e 0,4 | 19. $5^{x-1} + 5^{x-2} + 5^{x-3} + 5^{x-4} = 780$ Resp.: 5 |
| 9. $3^x + 3^{4-x} = 82$ Resp.: 0 e 4 | 20. $16^x - 4^{2x-1} - 10 = 2^{2x-1}$
Resp.: 1 |
| 10. $2^{2(x-2)} + 2^{2x} = 17$ Resp.: 0 e 2 | 21. $4^x - \frac{11 \cdot 4^x}{16} = \frac{80}{4^x}$ Resp.: 2 |
| 11. $\sqrt{a^{1-2x}} = \sqrt[5]{a^{1-7x}}$ Resp.: $-\frac{3}{4}$ | 22. $\frac{3^x}{2} + 3^{1-x} = 3 \frac{1}{2}$ Resp.: 0 e 1,6 |

Resolver os sistemas:

23. $\begin{cases} 2^x \cdot 3^y = 108 \\ 4^x \cdot 2^y = 128 \end{cases}$ Resp.: 2 e 3.
24. $\begin{cases} 3^x - y = 9 \\ \log x - \log y = \log 2 \end{cases}$ Resp.: 4 e 2.
25. Calcular o número de termos de uma progressão geométrica, cujo primeiro termo é 5, o último é 10 240 e a razão, 2. Resp.: 12.
26. $\sqrt[2]{4} \cdot \sqrt[2]{2} = 4$ Resp.: 2 e 0,5.
27. a) $(a^x)^2 = (a^x)^2$ Resp.: 0 e 2.
b) $(a^b - a)^2 = a^2$ Resp.: 0 e $b-1$ (E. N. Química, 1945).

28. Resolver o sistema:

$$\begin{cases} x^y = y^x \\ x^5 = y^3 \end{cases} \text{ (E. Militar, 1941) Resp.: } x = 0 \text{ e } y = 0 \text{ ou } x = \pm \frac{5}{3} \sqrt[3]{\frac{5}{3}}$$

$$\text{e } y = \pm \frac{25}{9} \sqrt[3]{\frac{5}{3}}.$$

29. Resolver: $100 \times 10^x = \sqrt[3]{1000^5}$ (E. Militar, 1937) (E. F. E. - 960)
Resp.: 3 e -5.

30. Resolver: $2^{2x} + 3 - 57 = 65(2^x - 1)$ (E. Militar, 1940) Resp.: 3 e -3.

31. Resolver a equação: $4^{x+2} \cdot 2^{x+4} = 24 \cdot 2^{2x}$ (E. Arq. Un. de Minas Gerais, 1952, cfr. Jornal de Matemática, Belo Horizonte)
Resp.: -3,4.

32. Resolver: $3(9^{x+1} - 7) = 16(9^x - 1)$ (E. E. Juiz de Fora - 1952).
Dispensa-se o cálculo logarítmico. Resp.: $x = \frac{\log 5 + \log 11}{\log 9}$.

33. Resolver: $2^x - 1 = \frac{\sqrt[3]{2\sqrt{2}}}{4}$, escrevendo o segundo membro com a forma 2^m (F. N. Arquitetura, 1947) Resp.: $-\frac{19}{12}$.

34. Resolver a equação $3^{2x-1} - 3^x - 3^{x-1} + 1 = 0$ (E. E. S. Carlos - U. S. Paulo, 1953) Resp.: 0 e 1.

35. Resolver: $3^x = \frac{15}{3^x-1} + 3^{x-2} = \frac{23}{3^x-2}$ (E. E. Paraná, 1947).
Resp.: 2,5.

Questões de Concurso em 1958:

36. O logaritmo de 1 na base a é ----- porque ----- (E. N. E.).
37. Calcule o log decimal de b sabendo que o log de 100 na base b é 8. (E. N. E.).
38. Calcule a parte inteira do logaritmo de 200 na base 3. (E. Flu. E.).
39. O logaritmo de um número N na base a é, por definição ----- (E. P. U. C. - Rio).
40. Calcule o logaritmo de 256 na base $2\sqrt{2}$. (E. P. U. C. - Rio).
41. Sendo $\log_n A = x$, tem-se $\log_n \sqrt[n]{A^x} = \dots$ (E. P. U. C. - Rio - 59)
42. Sendo $\log x = 3 \log a - \log(b+c)$, $x = \dots$ (E. N. E. - 1960)
43. Calcule a parte inteira do log. de 0,04 na base $1/2$. (E. P. U. C. - 1959)
Resp.: 4
44. Calcule $\log \sqrt[5]{9}$ na base $\sqrt{3}$. (E. F. E. - 1960)
45. Resolva a equação $\log x - \log(x+1) = 1$ (E. F. E. - 1959)
Resp.: -10/9

46. O valor de x da equação $2^x = 0,03$, sendo $\log 2 = 0,301$ e $\log 3 = 0,477$, com aproximação de décimos é (E.F.E. — 1957)
 Resp.: -5,1.
47. Resolva a equação $3^{(2-x)(x-4)} = 1/27$ (E.F.E. — 1959) Resp.: 5 e 1.
48. A equação $3^{x^2-x}\sqrt{3} = 1$ tem para soluções (E.P.U.C. — Rio, 1957) Resp.: 0 e $\sqrt{3}$
49. Dada a função $y = 3^{\frac{1}{x}}$, calcule os valores de x para os quais se tenha
 $y < \frac{1}{9}$. (E.F.E. — 1958). Resp.: $-1/2 < x < 0$.
50. Resolva a equação $3 \cdot 9^x + 7 \cdot 3^x - 10 = 0$ (E.F.E. — 1957)
 Resp.: $x = 0$.
51. Sabendo-se que $\log \sqrt[3]{x^2} = 1,43217$, calcule $\log x$. (E.N.E. — 1959).
 Resp.: 2,92588
52. Sendo $\log a = 2,71523$, calcule $\log \sqrt[3]{a}$. (E.N.E. — 1959)
 Resp.: 1,74305.
53. Resolva o sistema $x^y = \frac{1}{y^2}$
 $y^x = \frac{1}{\sqrt{x}}$
 (E.P.U.C. — Rio — 1959) Resp.: 1/2 e 2
54. Resolva a equação $92x + 81(x-1) = 82,27^{-1}$. (E.P.U.C. — Rio — 1960).
 Resp.: 1/4.

UNIDADE III

Retas e planos; superfícies e poliedros em geral; corpos redondos usuais; definições e propriedades; áreas e volumes

CAPÍTULO I

RETA E PLANO. DIEDROS. TRIEDROS

I) RETA E PLANO

1. Plano. A noção de plano é primitiva.

O plano é ilimitado em todas as direções. Quando é necessário objetivar um plano, faz-se a perspectiva cavaleira de uma porção retangular do mesmo, como o plano da figura 1.

2. Postulados do plano.

- 1.º) Toda reta que tem dois pontos num plano fica inteiramente contida no plano.
- 2.º) Por três pontos não situados em linha reta passa um plano e somente um.
- 3.º) Todo plano pode ser levado a coincidir com outro, de modo que uma reta qualquer do primeiro coincida com qualquer reta do outro.
- 4.º) Um plano divide o espaço em duas regiões que podemos denominar *semi-espacos*. Uma reta que passa duma dessas regiões à outra, encontra necessariamente o plano.

3. Determinação do plano. Um plano fica determinado de quatro maneiras distintas.

1.^a) *Três pontos não em linha reta determinam um plano, (Postulado 2).*

Os três pontos A , B e C (fig. 1) determinam o plano P .



FIG. 1

2.^a) *Uma reta e um ponto exterior determinam um plano.*

Há uma infinidade de planos que contêm a reta determinada pelos pontos A e B (fig. 2). De todos esses planos o único que contém o ponto C , exterior à reta AB , é o plano P , porque A , B e C são três pontos não em linha reta.

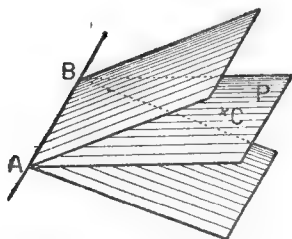


FIG. 2

3.^a) *Duas retas concorrentes determinam um plano.* Suponhamos as retas AB e CD (fig. 3). Consideremos a reta AB e um ponto qualquer C da segunda reta, que não seja a intersecção I das duas. A reta AB e o ponto exterior C determinarão um

plano que conterá a reta CD , por estarem nele situados os dois pontos C e I da mesma reta.

4.^a) *Duas retas paralelas determinam um plano.* Sejam as paralelas AB e CD (fig. 4).



FIG. 3



FIG. 4

A reta AB e um ponto qualquer da reta CD determinam um plano (segunda determinação); este plano conterá a reta CD , por definição de retas paralelas (*).

OBSERVAÇÃO. É importante adquirir a capacidade de **ver**, na perspectiva de uma figura de geometria no espaço, os diferentes planos determinados de um dos quatro modos, embora não estejam concretizados por intermédio de porções retangulares.

Observemos, por exemplo, a figura 20. Nela existem seis planos:

- o plano P , concretamente representado por um retângulo;
- o plano das concorrentes BC e AA_1 , onde estão situados os segmentos AC e A_1C ;
- o plano das concorrentes BD e AA_1 ;
- o plano das concorrentes BE e AA_1 , que aparece hachurado;
- o plano dos três pontos A , C e D , no semi-espaço superior ao plano P ;
- o plano dos três pontos A_1 , C e D , no semi-espaço inferior.

4. Posições relativas de duas retas. Consideremos um plano P e uma reta AB desse plano (fig. 5).

Se traçarmos uma reta CD que tenha apenas o ponto C no plano P , podemos concluir que nenhum plano poderá conter ao mesmo tempo as duas retas AB e CD .

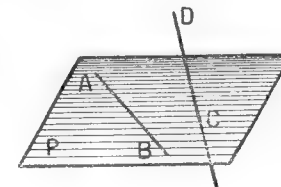


FIG. 5

Realmente, se tal plano existisse, conteria a reta AB e o ponto exterior C e, conseqüentemente, confundir-se-ia com o plano P , pois uma reta e um ponto exterior determinam um plano; mas, neste caso, o plano P conteria a reta CD , o que é contra a hipótese.

Do exposto conclui-se que duas retas no espaço podem ter duas posições relativas:

- 1.^a) *não estão situadas no mesmo plano: retas reversas;*
- 2.^a) *estão no mesmo plano: certas coplanares; neste caso podem ser concorrentes ou paralelas, como vimos em geometria plana.*

(*) Matemática, terceira série ginasial.

5. Posições relativas de uma reta e um plano. Quando uma reta tem dois pontos num plano, fica contida nêlo (Postulado 1). Assim, dizer que uma reta tem dois pontos num plano equivale a dizer que tem todos os seus pontos no mesmo plano.

Resulta daí que uma reta pode ocupar três posições em relação a um plano:

- 1.ª) *tem dois pontos no plano* (AB , fig. 5); neste caso pertence ao plano e diz-se *aposta* ao plano;
- 2.ª) *tem um ponto no plano*; neste caso a reta fura o plano neste ponto que se denomina *traço* ou *pé* da reta sôbre o plano e pode lhe ser perpendicular ou oblíqua (DC , fig. 5).
- 3.ª) *não tem ponto algum no plano*; neste caso diz-se *paralela* ao plano (AB paralela a P , fig. 6).

6. Posições relativas de dois planos.

TEOREMA. Quando dois planos têm um ponto comum, têm também uma reta comum que contém o mesmo ponto.

Hip.: O plano P e o das concorrentes AB e AC têm o ponto comum A . (fig. 7).

Tese: Os mesmos planos têm uma reta comum.

Demonstração.

No semi-espaço inferior ao plano P consideremos o ponto D da reta AB . A reta CD pertence ao plano das concorrentes,

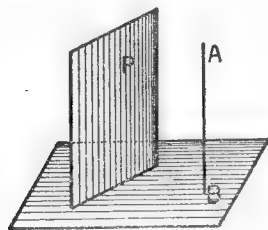


FIG. 6

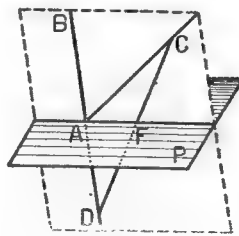


FIG. 7

por ter os dois pontos C e D no mesmo plano, e cõrta o plano P num ponto F , por passar de um a outro semi-espaço (4.º postulado do plano).

O ponto F está, pois, situado ao mesmo tempo nos dois planos e o mesmo acontecerá à reta AF que tem os dois pontos A e F em ambos os planos.

Resulta dêsse teorema que dois planos distintos podem ocupar as duas seguintes posições relativas:

- 1.ª) *têm uma reta comum*; neste caso são *secantes* e a reta comum denomina-se *intersecção* dos dois planos;
- 2.ª) *não têm ponto algum comum*; neste caso dizem-se *paralelos*.

RESUMO

POSICÕES RELATIVAS	→ DE DUAS RETAS	{ complanares . . . não complanares	{ concorrentes { oblíquas perpendiculares . paralelas
	→ DE RETA E PLANO	apostas concorrentes paralelos	
	→ DE DOIS PLANOS	secantes paralelos	

II) PARALELISMO DE RETAS E PLANOS

7. Retas paralelas.

PRIMEIRO TEOREMA. Por um ponto situado fora de uma reta pode-se traçar uma paralela a esta reta e sòmente uma.

Demonstração.

Sejam a reta S e o ponto exterior A (fig. 8).

Qualquer paralela a S determina com ela um plano; logo, se a paralela traçada passar no ponto A , o plano das



FIG. 8

duas paralelas confundir-se-á com o plano P , determinado por S e A . Em virtude do postulado de Euclides, a paralela a S que contém o ponto A , é única.

SEGUNDO TEOREMA. Quando duas retas são paralelas, todo plano que corta a primeira, corta também a segunda

Demonstração.

Sejam S e S' duas paralelas e P , um plano concorrente com S no ponto A (fig. 9).

O plano das paralelas S e S' e o plano P são secantes, por terem um ponto comum A , e sua intersecção será uma reta AB .

As retas S' e AB estão no mesmo plano e não são paralelas, pois já existe a reta S paralela a S' , passando pelo ponto

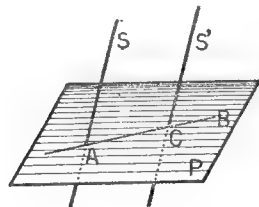


FIG. 9

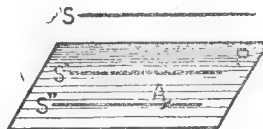


FIG. 10

A ; logo, terão um ponto de intersecção C que pertence também ao plano P . Assim, o plano P corta S' no ponto C .

TERCEIRO TEOREMA. Duas retas paralelas a uma terceira são paralelas entre si.

Hip.: $\begin{cases} S' \parallel S \\ S'' \parallel S \end{cases}$ Tese: $S' \parallel S''$

Demonstração. (fig. 10).

a) S' e S'' não têm ponto comum, pois, em caso contrário, dêsse ponto ficariam traçadas duas paralelas à reta S , o que é absurdo.

b) S' e S'' estão no mesmo plano. Realmente, consideremos o plano P , determinado pela reta S' e o ponto A da reta S'' .

S'' é apostada a P ou é cortada por P no ponto A . Neste último caso, P cortaria a paralela S e, conseqüentemente, cortaria também S' , por ser esta reta paralela a S , o que é absurdo, pois, por construção, S' é apostada a P . Assim, S' e S'' estão no mesmo plano P .

8. Reta e plano paralelos.

PRIMEIRO TEOREMA. A reta exterior a um plano e paralela a uma reta dêste, é paralela ao plano.

Hip.: $\begin{cases} AB \parallel CD \\ CD \text{ e } P \text{ são apostos} \end{cases}$ Tese: $AB \parallel P$.

Demonstração.

As paralelas AB e CD determinam um plano, cuja intersecção com o plano P é a reta CD (fig. 11). Assim, os pontos comuns aos dois planos estão todos situados sobre CD e, como AB não encontra CD em virtude da hipótese, também não pode encontrar o plano P .

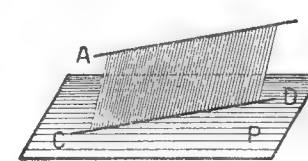


FIG. 11

SEGUNDO TEOREMA. Se uma reta fôr paralela a um plano, todo plano que a contiver e cortar o primeiro, o fará segundo uma paralela àquela reta.

Hip.: $AB \parallel P$ Tese: $AB \parallel CD$.

Demonstração.

Seja CD a intersecção de P com um plano conduzido por AB (fig. 11).

A reta AB não pode encontrar CD , pois do contrário encontraria também o plano P , o que é contra a hipótese.

CONSEQUÊNCIA. Quando uma reta é paralela a um plano, a paralela à reta, traçada por um ponto do plano, é apostada a este plano.

Demonstração.

Seja AB paralela ao plano P e C um ponto do plano (fig. 11).

Tracemos por C uma paralela a AB ; seja CD .

As paralelas AB e CD determinam um plano, cuja intersecção com o plano P é uma reta paralela a AB , em virtude do teorema; logo, esta intersecção confunde-se com CD , porque de um ponto C só se pode traçar uma paralela a uma reta dada.

CD está, pois, no plano P .

OBSERVAÇÃO Os dois teoremas permitem concluir: a condição suficiente e necessária para que uma reta seja paralela a um plano é que o seja a uma reta do plano.

Assim, de um ponto dado pode-se traçar uma infinidade de retas paralelas a um plano dado e uma infinidade de planos paralelos a uma reta dada.

TERCEIRO TEOREMA. Toda reta paralela a dois planos que se cortam é paralela à sua intersecção.

Hip.: $\begin{cases} AB \parallel P \\ AB \parallel Q \end{cases}$

Tese: $AB \parallel MN$

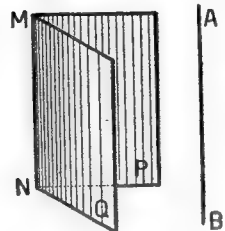


FIG. 12

Demonstração.

Tracemos do ponto M da intersecção dos dois planos, uma reta paralela a AB (fig. 12).

Em virtude do teorema anterior, esta paralela ficará situada no plano P e também no plano Q ; logo, confundir-se-á com a intersecção MN dos dois planos.

9. Planos paralelos.

PRIMEIRO TEOREMA. A condição necessária e suficiente de paralelismo de dois planos é que um deles contenha duas retas concorrentes, paralelas ao outro.

Demonstração: $H: MA$ e $MB \parallel P$. Tese: $Q \parallel P$.

- a) *A condição é suficiente.* Com efeito, se o plano Q (fig. 13) cortasse P , a intersecção cortaria uma das retas MA e MB , em virtude do postulado de Euclides, o que contraria a hipótese das duas retas serem paralelas a P .

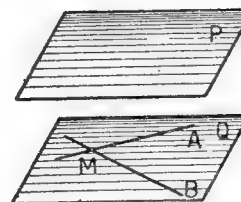


FIG. 13

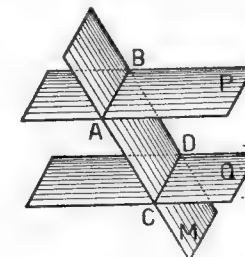


FIG. 14

- b) *A condição é necessária.* Realmente, se P e Q são planos paralelos (fig. 13), qualquer reta contida num deles é paralela ao outro, pois, se P tivesse um ponto comum com MA ou MB teria também com o plano Q , o que seria contra a hipótese. Assim, os dois planos não podem ser paralelos sem que um seja paralelo às retas do outro, e a condição é necessária.

SEGUNDO TEOREMA. As intersecções de dois planos paralelos com um terceiro plano são paralelas.

Demonstração.

Sejam AB e CD as intersecções dos planos paralelos P e Q com o plano M (fig. 14).

As retas AB e CD estão no mesmo plano M e não podem se encontrar, pois neste caso os planos P e Q teriam um ponto comum, o que é contra a hipótese.

TERCEIRO TEOREMA. Por um ponto exterior a um plano dado passa um plano paralelo ao primeiro e um só.

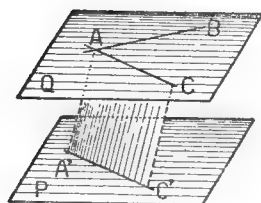


FIG. 15

Demonstração.

Seja A um ponto exterior ao plano P (fig. 15).

a) Existe um plano paralelo a P , que contém A .

Tracemos, por A , duas retas, AB e AC , paralelas ao plano P . AB e AC determinam um plano Q , paralelo a P (primeiro teorema).

b) O plano Q é único.

Suponhamos a existência de um segundo plano R , paralelo a P , passando em A . Tracemos, no plano P , a reta $A'C'$ paralela a AC . A reta $A'C'$ e o ponto exterior A determinam um plano, cujas intersecções com P e qualquer plano que lhe seja paralelo serão paralelas (segundo teorema). Assim, pelo ponto A passariam duas retas paralelas a $A'C'$, que seriam, respectivamente, a intersecção do plano $AA'C'$ com o plano Q , isto é, AC , e a intersecção do mesmo plano $AA'C'$ com o plano R , o que é absurdo.

Logo, o plano Q é único.

Conseqüências.

1.ª) Dois planos paralelos a um terceiro são paralelos entre si. Em caso contrário, por um dos pontos comuns passariam dois planos paralelos ao terceiro, o que é absurdo.

Conclui-se que todos os planos paralelos a um plano dado são paralelos dois a dois e formam um feixe de planos paralelos.

2.ª) Se dois planos são paralelos, todo plano que cortar o primeiro cortará o segundo.

3.ª) O lugar geométrico das retas que passam por um ponto e são paralelas a um plano dado, é o plano que passa no mesmo ponto e é paralelo ao dado.

QUARTO TEOREMA. Dois segmentos paralelos compreendidos entre planos paralelos, ou entre uma reta e um plano paralelos, são iguais.

Hip.: $\begin{cases} AB \parallel CD \\ P \parallel Q \end{cases}$ ou $AC \parallel Q$. Tese: $AB = CD$

Demonstração.

As paralelas AB e CD determinam um plano M , cujas intersecções AC e BD com os planos P e Q são paralelas. Assim, o quadrilátero $ACDB$ é um paralelogramo e os lados opostos são iguais, isto é:

$$AB = CD$$

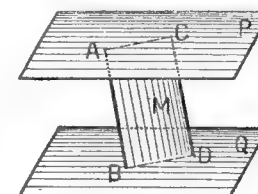


FIG. 16

OBSERVAÇÃO. No caso da segunda hipótese, isto é, da reta AC paralela ao plano Q , raciocinaremos supondo previamente traçado o plano P , paralelo a Q , contendo AC .

QUINTO TEOREMA. Um feixe de planos paralelos intercepta sobre duas retas quaisquer segmentos proporcionais.

Hip.: $P \parallel Q \parallel R \parallel S$ Tese: $\frac{a}{a'} = \frac{b}{b'} = \frac{c}{c'}$.

Demonstração

Pelo ponto A tracemos uma reta AB paralela a D' (fig. 17), na qual os planos interceptarão três segmentos m , n e p . De acordo com o teorema anterior temos:

$$\begin{cases} m = a' \\ n = b' \\ p = c' \end{cases} \quad (1)$$

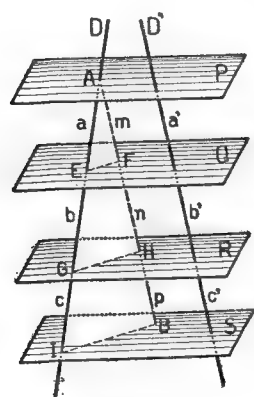


FIG. 17

As retas concorrentes D e AB determinam um plano, cujas intersecções EF , GH e IB com os planos paralelos Q, R e S são paralelas. Assim, no plano das concorrentes podemos concluir:

$$\frac{a}{m} = \frac{b}{n} = \frac{c}{p},$$

em virtude do teorema de geometria plana (*).

Substituindo m , n e p por seus iguais (1), resulta:

$$\frac{a}{a'} = \frac{b}{b'} = \frac{c}{c'}.$$

SEXTO TEOREMA. Dois ângulos que têm os lados respectivamente paralelos e dirigidos no mesmo sentido, são iguais.

Demonstração.

1.º) Se os ângulos forem coplanares a propriedade é conhecida (*).

2.º) Se os ângulos não forem coplanares (fig. 18), ficam situados em planos paralelos porque o plano de cada um contém duas retas concorrentes paralelas ao outro. Sejam A e A' os ângulos dados, que satisfaem às condições:

$$AB \parallel A'B'$$

$$AC \parallel A'C'$$

Tomemos, sobre os lados dos ângulos, os segmentos:

$$AB = A'B' \quad \text{e} \quad AC = A'C'$$

e tracemos os segmentos AA' , BB' e CC' .

(*) Matemática, terceira série ginásial, do mesmo autor.

De acordo com a hipótese e a construção $AA' B'B$ é um paralelogramo; logo, temos:

$$BB' = AA' \quad \text{e} \quad BB' \parallel AA'.$$

Analogamente, $AA' C' C$ é um paralelogramo e portanto

$$CC' = AA' \quad \text{e} \quad CC' \parallel AA'$$

donde

$$BB' = CC' \quad \text{e} \quad BB' \parallel CC'.$$

Consequentemente, $BB' C' C$ é um paralelogramo e podemos concluir:

$$BC = B'C'.$$

Assim, os dois triângulos BAC e $B'A'C'$ são congruentes em virtude do terceiro caso, e temos:

$$\hat{A} = \hat{A'}.$$

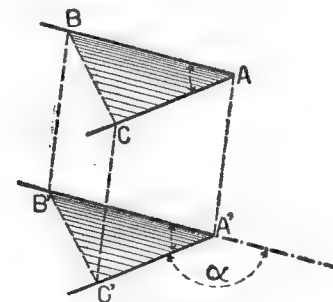


FIG. 18

OBSERVAÇÃO. Se um dos lados tiver sentido oposto a seu paralelo, como no caso dos ângulos α e A' da figura 18, os dois ângulos serão suplementares.

10. Aplicação. Ângulo de duas retas não coplanares.

Ângulo de duas retas não coplanares AB e CD é, por definição, o ângulo formado por duas paralelas às retas dadas, traçadas por um ponto arbitrário M (fig. 19).

Em virtude do último teorema, qualquer que seja o ponto M que se considere, o ângulo obtido é constante.

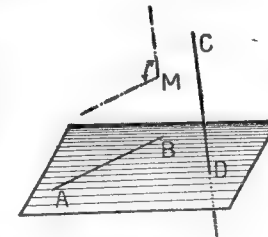


FIG. 19

Quando é reto o ângulo de duas retas não coplanares, as mesmas dizem-se *ortogonais* ou *perpendiculares*.

Conclui-se da definição de ângulo:

- 1) *tôdas as paralelas de um feixe formam ângulos iguais com uma reta dada.*
- 2) *se uma reta é perpendicular a outra, será também perpendicular a tôdas as paralelas a essa outra.*

III) RETA E PLANO PERPENDICULARES

11. Definições.

Uma reta diz-se *perpendicular a um plano* quando é perpendicular a *tôdas as retas* do plano.

Reciprocamente, diz-se que o *plano é perpendicular à reta*.

A reta diz-se *oblíqua ao plano* quando o corta sem satisfazer a condição anterior, embora seja perpendicular a uma reta do plano.

Na figura 20, a reta AE é perpendicular a CD , mas não é ao plano P , por não ser às demais retas desse plano.

Por essa definição e pela de ângulo de duas retas, conclui-se que a reta perpendicular a um plano é, também, perpendicular às retas e planos paralelos ao dado e, reciprocamente, o plano perpendicular a uma reta é perpendicular às suas paralelas.

Distância de dois planos paralelos é o segmento que eles determinam numa perpendicular comum.

12. Teoremas

PRIMEIRO. Toda reta perpendicular a duas retas não paralelas de um plano é perpendicular ao plano.

Hip.: $\begin{cases} AB \perp BC \\ AB \perp BD \end{cases}$

Tese: $AB \perp P$.

Demonstração.

Prolonguemos AB , na parte inferior do plano de modo que se tenha (fig. 20):

$$BA_1 = AB.$$

Liguemos os pontos A e A_1 ao ponto C . As retas concorrentes AA_1 e BC determinam um plano no qual temos

$$AC = A_1C,$$

como oblíquas, cujos pés se afastam igualmente do da perpendicular.

Analogamente, unindo A e A_1 ao ponto D teremos, considerando o plano das concorrentes AA_1 e BD :

$$AD = A_1D.$$

Traçando a reta CD , no plano P , ficam formados os dois triângulos ACD e A_1CD , que são congruentes em virtude do terceiro caso.

Da congruência dos triângulos resulta:

$$\alpha = \beta$$

Se traçarmos no plano P e pelo ponto B uma reta qualquer, BE por exemplo, e unirmos o ponto E aos dois pontos A e A_1 , os triângulos ACE e A_1CE serão congruentes em virtude do segundo caso, porque:

$$CE \text{ é comum, } \alpha = \beta, \text{ e } AC = A_1C.$$

Da congruência dos triângulos resulta:

$$AE = A_1E$$

e, conseqüentemente, o triângulo AEA_1 é isósceles. Nêsse triângulo, BE é mediana por construção, logo, será também altura, isto é, AA_1 é perpendicular a BE .

O raciocínio pode ser repetido para qualquer outra reta do plano P e, portanto, AB é perpendicular ao plano.

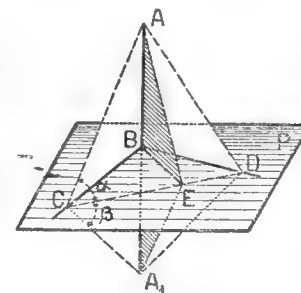


FIG. 20

OBSERVAÇÃO. Se as retas traçadas no plano P não passarem no ponto B , para determinar o ângulo com AB traçar-lhes-emos paralelas por B e o raciocínio anterior será repetido.

SEGUNDO. Por um ponto dado pode-se traçar um plano perpendicular a uma reta dada e somente um.

Demonstração.

PRIMEIRO CASO: *O ponto está situado sobre a reta.* Seja o ponto O da reta MN (fig. 21). Tracemos pelo ponto O as duas retas OA e OB , ambas perpendiculares a MN no ponto O , a primeira situada no plano P e a segunda em Q . As duas retas traçadas determinam um plano R , perpendicular a MN (Primeiro teorema).

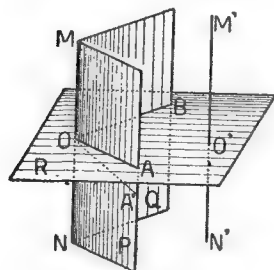


FIG. 21

O plano R é o *único* plano perpendicular a MN no ponto O . Realmente, se existisse um segundo, R' , a reta MN seria perpendicular a *todas* as retas contidas nesse segundo e, conseqüentemente, seria perpendicular à sua intersecção OA' com o plano P . Assim, do ponto O ficariam traçadas duas perpendiculares a MN no mesmo plano P , o que é absurdo.

Conseqüência.

Dessa demonstração resulta que toda reta perpendicular a MN no ponto O está situada no plano R , pois se estivesse em R' a intersecção de R com R' seria também perpendicular a MN (por estar em R), e ficariam no plano R' duas perpendiculares a MN . Conclui-se, então:

O lugar geométrico das perpendiculares traçadas do mesmo ponto de uma reta dada é o plano perpendicular à mesma reta, no ponto dado.

SEGUNDO CASO: *O ponto é exterior à reta.* Seja a reta MN e o ponto exterior O' (fig. 21).

Pelo ponto O' tracemos uma paralela a MN ; seja $M'N'$. O plano R , perpendicular a $M'N'$ no ponto O' será também à sua paralela MN (pág. 114). Este plano é *único*, pois se existisse outro plano perpendicular a MN , também o seria a $M'N'$, o que é impossível, como vimos no primeiro caso.

TERCEIRO. Por um ponto dado pode-se traçar uma reta perpendicular a um plano, e somente uma.

Demonstração.

Seja o plano P e o ponto A (fig. 22).

Consideremos a reta qualquer CD do plano P e tracemos pelo ponto A o plano Q , perpendicular a CD . Seja BE a intersecção dos dois planos. Tracemos, finalmente, no plano Q , a reta AB , perpendicular a BE .

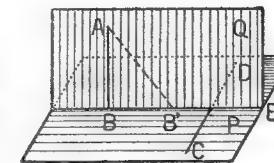


FIG. 22

AB é perpendicular ao plano P , por ser perpendicular a duas retas desse plano; à primeira BE , por construção, e à segunda CD , em virtude de ser essa reta perpendicular ao plano Q que contém AB .

A perpendicular AB é *única*. Realmente, se existisse uma segunda reta AB' , perpendicular ao plano P , seria também perpendicular à reta BE desse plano e assim ficariam traçadas no plano Q duas perpendiculares a BE , traçadas do mesmo ponto A , o que é impossível.

OBSERVAÇÃO. Se considerarmos o ponto dado, A , situado no plano P , no lugar de B , a mesma demonstração prevalece, bastando trocar a posição dos pontos A e B na figura. O teorema fica assim demonstrado para qualquer situação do ponto em relação ao plano dado.

QUARTO. Duas retas perpendiculares ao mesmo plano são paralelas.

$$\text{Hip.: } \begin{cases} S \perp P \\ S' \perp P \end{cases}$$

$$\text{Tese: } S \parallel S'$$

Demonstração.

Se S' não fôsse paralela a S (fig. 23) poderíamos por um ponto M de S' traçar uma paralela a S . Esta nova reta,

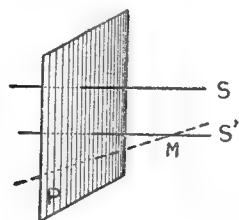


FIG. 23

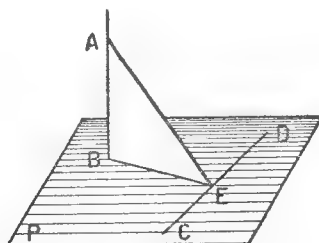


FIG. 24

paralela a S , seria perpendicular ao plano P (pág. 114), e do ponto M ficariam traçadas duas perpendiculares a P , o que é impossível (terceiro teorema).

Assim, S e S' são paralelas.

QUINTO. Teorema das três perpendiculares. Se, do pé da perpendicular a um plano, traçarmos a perpendicular a uma reta do plano, a reta que passa pelo pé da segunda perpendicular e por um ponto qualquer da primeira, é perpendicular à reta do plano.

$$\text{Hip.: } \begin{cases} AB \perp P \\ BE \perp CD \end{cases}$$

$$\text{Tese: } AE \perp CD$$

Demonstração.

As retas AB e BE determinam um plano que contém a reta AE . (fig. 24).

A reta CD é perpendicular a êsse plano, em virtude de o ser a duas retas do plano; à primeira, BE , por hipótese, e à segunda AB , por ser esta reta perpendicular ao plano P .

Se CD é perpendicular ao plano das concorrentes AB e BE , será, também, à reta AE dêsse plano.

SEXTO. Se, de um ponto exterior a um plano, traçarmos a perpendicular e várias oblíquas:

- 1.º) a perpendicular é menor que qualquer oblíqua;
- 2.º) duas oblíquas que se afastam igualmente do pé da perpendicular são iguais;
- 3.º) de duas oblíquas que se afastam desigualmente do pé da perpendicular, a que mais se afasta é a maior.

$$\text{Hip.: } \begin{cases} AB \perp P \\ BC = BD \\ BE > BC \end{cases}$$

$$\text{Tese: } \begin{cases} AB < AC \\ AC = AD \\ AE > AC \end{cases}$$

Demonstração (fig. 25).

- 1.º) A perpendicular AB e uma oblíqua qualquer AC por exemplo, determinam um plano, cuja intersecção com o plano P é a reta BC .

No plano das duas concorrentes, temos

$$AB \perp BC \quad \text{e} \quad AC \perp BC,$$

logo, podemos concluir:

$$AB < AC$$

em virtude do teorema de geometria plana.

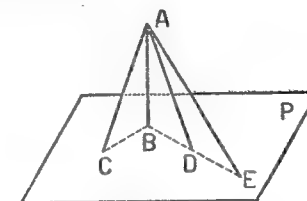


FIG. 25

2.º) Sendo BC igual a BD , os dois triângulos retângulos ABC e ABD são congruentes, por terem o cateto AB comum e os catetos BC e BD iguais por hipótese. Da congruência conclui-se:

$$AC = AD$$

3.º) Temos por hipótese:

$$BE > BC.$$

Tomemos, sobre BE , o segmento BD igual a BC e, de acordo com a segunda parte, podemos concluir:

$$AC = AD.$$

Ora, no plano das concorrentes AB e AE , o segmento AE é maior que AD , de acordo com o teorema de geometria plana; logo, conclui-se:

$$AE > AC.$$

13. Aplicações.

1.ª) **Plano mediador de um segmento.** Chama-se plano mediador de um segmento AB (fig. 26) o plano perpendicular a AB , que passa no ponto médio O desse segmento.

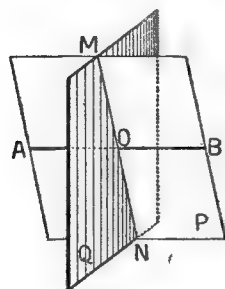


FIG. 26

O plano mediador é o lugar geométrico dos pontos do espaço equidistantes dos extremos do segmento dado.

Realmente, consideramos o plano P que contém o segmento AB . Neste plano, os pontos equidistantes de A e B ficam situados na reta MN , perpendicular ao meio de AB . O mesmo acontece nos demais planos que contêm AB . Assim, os pontos do espaço equidistantes de A e B ficam situados sobre perpendiculares a AB no ponto médio O e, portanto, no plano Q , perpendicular a AB no ponto médio O (segundo teorema, consequência).

2.ª) **Distância de um ponto a um plano.** Distância é o comprimento do segmento da perpendicular traçada do ponto ao plano, e compreendido entre o ponto e o plano. A distância do ponto A ao plano P (fig. 25) é o segmento AB .

3.ª) **Os traços das oblíquas iguais, traçadas de um ponto exterior a um plano, ficam situados sobre uma circunferência, cujo centro é o pé da perpendicular traçada do ponto ao plano** (fig. 27). Realmente, se as oblíquas são iguais, afastam-se igualmente do pé da perpendicular, e, portanto tem-se:

$$OB = OC = OD = \dots$$

e os pontos $B, C, D \dots$ pertencem a uma circunferência de centro O .

4.ª) **O lugar geométrico dos pontos do espaço, equidistantes de três pontos não em linha reta, é uma reta perpendicular ao plano dos três pontos, que passa pelo centro do círculo que os mesmos determinam** (fig. 27).

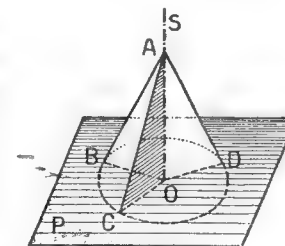


FIG. 27

Sejam B, C e D , três pontos não em linha reta, que determinarão um plano P e, neste plano, uma circunferência de centro O , logo temos:

$$OB = OC = OD.$$

Se pelo ponto O , traçarmos uma reta S , perpendicular ao plano P , considerando um ponto qualquer A dessa reta, podemos concluir:

$$AB = AC = AD = \dots$$

como oblíquas que se afastam igualmente do pé da perpendicular, e, portanto, o ponto qualquer A é equidistante dos três pontos dados.

A reta S denomina-se *eixo do círculo* determinado pelos pontos B, C, D .

IV) DIEDROS. PLANOS PERPENDICULARES

14. Definições.

Diedro é a figura formada por dois semi-planos limitados por uma mesma reta.

Os dois semi-planos P e Q (fig. 28) denominam-se **faces**.

A reta comum AB denomina-se **aresta**.

O diedro representa-se pelas letras da aresta.

Na figura 28 temos o diedro AB . Em certos casos, é necessário representá-lo pelas letras da aresta e uma de cada face. Na figura 29 há três diedros com a mesma aresta AB ; para distinguí-los, devemos enunciá-los:

$$MABP, PABQ, MABQ.$$

Ângulo plano ou retilíneo dum diedro é o ângulo formado por duas perpendiculares à aresta, traçadas do mesmo ponto e situadas uma em cada face. Na figura 28, o ângulo α é retilíneo do diedro AB .

É arbitrário o ponto tomado na aresta, pois os ângulos serão todos iguais por terem os lados respectivamente paralelos e dirigidos no mesmo sentido.

Observemos que o plano do retilíneo é perpendicular a aresta do diedro, por conter duas perpendiculares à mesma aresta.

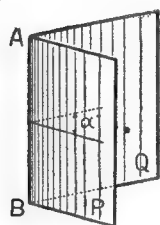


FIG. 28

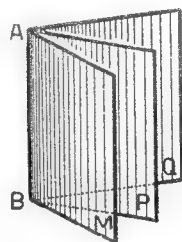


FIG. 29

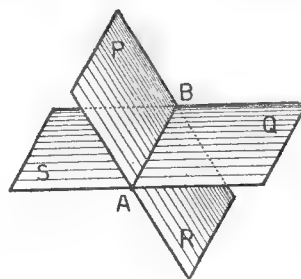


FIG. 30

Reta de maior declive de um plano P em relação a Q (fig. 28) é a reta de P perpendicular à interseção. É, pois, o lado do retilíneo.

Diedros adjacentes são os que têm a mesma aresta AB (fig. 29) e uma face comum (P), compreendida entre faces não comuns (M e Q).

Dois diedros dizem-se **opostos pela aresta** quando as faces de cada um estão no prolongamento das faces do outro. Na figura 30, os diedros $PABQ$ e $RABS$ são opostos.

Dois diedros são **congruentes** quando podem coincidir por um deslocamento.

Bissetor de um diedro é o semi-plano cuja reta de origem é a aresta, e divide o diedro em dois diedros iguais.

15. Soma de diedros. Levando dois diedros quaisquer à situação de adjacentes, as faces não comuns formam um novo diedro que se denomina **soma** dos diedros dados. Na figura 29 o diedro $MABQ$ é a soma dos diedros $MABP$ e $PABQ$.

16. Propriedades dos diedros.

PRIMEIRA. Dois diedros congruentes têm retilíneos iguais.

Hip.: $AB = CD$ Tese: $\alpha = \beta$.

Demonstração.

Deslocando o diedro CD sobre AB (fig. 31), as arestas e as faces coincidirão em virtude da hipótese e o ponto I da reta CD pode tomar a posição de F . A reta IH coincidirá, então, com EF , pois no mesmo plano só se pode traçar uma perpendicular a uma reta. Da mesma forma, IJ coincidirá com FG e, portanto:

$$\alpha = \beta.$$

Recíproca. Dois diedros que têm retilíneos iguais são congruentes.

Hip: $\alpha = \beta$. Tese: $AB = CD$

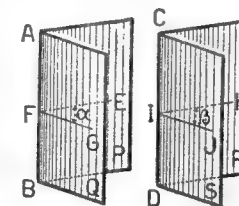


FIG. 31

Demonstração.

Desloquemos o segundo diedro sobre o primeiro de modo que o ângulo α coincida com seu igual β . Assim, os planos EFG e HIJ dêsses dois ângulos coincidirão (fig. 31).

As retas AB e CD serão ambas perpendiculares ao plano do retilíneo no ponto F que coincide com I ; logo, também coincidirão. Assim, podemos concluir que o plano P , determinado por AB e EF , coincidirá com o plano R , determinado por CD e IH .

Da mesma forma demonstraremos a coincidência dos planos Q e S .

Os diedros têm pois a aresta e as faces em coincidência e são congruentes.

SEGUNDA. Dois diedros quaisquer são proporcionais a seus retilíneos.

Hip.: $\begin{cases} a \text{ é retilíneo de } AB \\ c \text{ é retilíneo de } CD \end{cases}$ Tese: $\frac{AB}{CD} = \frac{a}{c}$

Demonstração.

Suponhamos que os retilíneos a e c (fig. 32) admitam como medida comum o ângulo α , o que é sempre possível, com erro tão pequeno quanto quisermos por ser α arbitrário.

$$\text{Teremos: } \begin{cases} \hat{a} = m\alpha \\ \hat{c} = p\alpha \end{cases} \therefore \frac{\hat{a}}{\hat{c}} = \frac{m}{p} \quad (1)$$

As retas que dividem os ângulos a e c , consideradas com as arestas dos respectivos diedros, determinam planos que

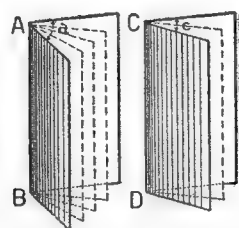


FIG. 32

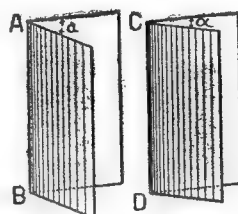


FIG. 33

dividirão os diedros, respectivamente, em m e p diedros iguais, em virtude da propriedade anterior. Assim, se representarmos por β um dos diedros parciais, teremos:

$$\frac{AB}{CD} = \frac{m\beta}{p\beta} \therefore \frac{AB}{CD} = \frac{m}{p} \quad (2)$$

Comparando as igualdades (1) e (2) concluiremos finalmente:

$$\frac{AB}{CD} = \frac{\hat{a}}{\hat{c}}$$

17. Aplicações.

1.ª) **Medida dos diedros.** Se convençionarmos adotar para unidade de diedro o que tiver retilíneo igual à unidade de ângulo, a medida do diedro e de seu retilíneo serão representadas pelo mesmo número.

Seja AB um diedro de retilíneo a e CD o diedro unidade, isto é, cujo retilíneo α é igual a unidade de ângulo (fig. 33).

Em virtude da segunda propriedade, temos:

$$\frac{AB}{CD} = \frac{a}{\alpha} \quad (1)$$

Como CD é por hipótese unidade de diedro, $\frac{AB}{CD}$ será a medida de AB e da mesma forma $\frac{a}{\alpha}$ será a de a .

Assim, da igualdade (1) resulta:

$$\text{med. } AB = \text{med. } a$$

2.ª) **Extensão das propriedades dos ângulos planos aos diedros.** Em virtude da primeira aplicação, podemos sempre, em relação à medida, substituir um diedro pelo seu retilíneo. Daí, a conclusão:

a cada propriedade dos ângulos planos corresponde uma propriedade dos diedros, cuja demonstração será obtida substituindo o diedro pelo retilíneo.

Exemplo:

Dois diedros opostos pela aresta são congruentes.

Demonstração.

Tracemos, pelo ponto M (fig. 34), um plano perpendicular à aresta AB .

Sejam CD e EF as intersecções desse plano com as faces do diedro.

Assim, α e β são retilíneos dos diedros opostos.

Como, no plano M , α e β são opostos pelo vértice, temos:

$$\alpha = \beta$$

e, portanto, os diedros correspondentes são congruentes, por terem retilíneos iguais.

Da mesma forma, das definições relativas aos ângulos planos concluem-se definições para os diedros. Assim:

um diedro é *reto*, quando o retilíneo é reto;

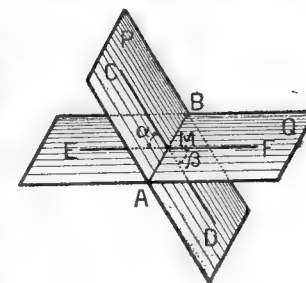


FIG. 34

dois diedros são *complementares*, quando seus retilíneos são complementares;

dois diedros são *suplementares*, quando seus retilíneos são suplementares.

18. Planos perpendiculares. Dois planos dizem-se perpendiculares quando se cortam formando diedros retos, ou, o que é o mesmo, diedros adjacentes iguais.

19. Teoremas sôbre planos perpendiculares.

PRIMEIRO. O plano que contém uma reta perpendicular a um segundo, é perpendicular a este segundo.

Hip.: $\begin{cases} AB \perp M \\ P \text{ contém } AB \end{cases}$ Tese: $P \perp M$

Demonstração.

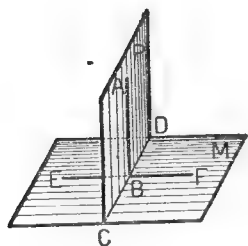


FIG. 35

Tracemos, no plano M , uma reta EF perpendicular a CD no ponto B (fig. 35). Como AB é, por hipótese, perpendicular ao plano M , será também perpendicular à reta EF desse plano. Assim, o ângulo ABF é reto e como é, por construção, retilíneo do diedro $PCDM$, conclui-se:

$$P \perp M$$

SEGUNDO. Se dois planos são perpendiculares, a reta traçada em um deles e perpendicular à sua intersecção, será perpendicular ao outro.

Hip.: $\begin{cases} P \perp M \\ AB \perp CD \end{cases}$ Tese: $AB \perp M$

Demonstração.

Tracemos, no plano M , a reta EF perpendicular a CD no ponto B (fig. 35). O ângulo ABF é retilíneo do diedro $PCDM$:

Como este diedro é reto por hipótese, conclui-se que o retilíneo também o é e, portanto, AB é perpendicular a EF .

Assim, a reta AB é perpendicular a duas retas do plano M ; à primeira, CD , por hipótese, e à segunda, EF , como demonstramos; logo, AB é perpendicular ao plano M .

TERCEIRO. (Recíproco do primeiro). Quando dois planos são perpendiculares, se traçarmos por um ponto da intersecção uma perpendicular ao segundo, esta perpendicular ficará contida no primeiro.

Hip.: $\begin{cases} P \perp M \\ AB \perp M \end{cases}$ Tese: AB é aposta a P .

Demonstração.

Se AB não ficasse contida no plano P (fig. 35), poderíamos traçar neste plano e pelo ponto B , uma reta perpendicular à intersecção CD e que seria também perpendicular ao plano M , em virtude do teorema anterior. Dêsse modo, pelo ponto B ficariam traçadas duas perpendiculares ao plano M , o que é absurdo.

Conseqüências:

Dos três teoremas anteriores concluem-se as conseqüências:

- 1.ª) A condição *necessária e suficiente* para que um plano seja perpendicular a outro é que *contenha uma reta perpendicular a esse outro*.
- 2.ª) Como por uma reta passa uma infinidade de planos, podemos concluir que por uma reta perpendicular a um plano passa uma *infinidade* de planos perpendiculares ao primeiro.
- 3.ª) Por um ponto dado passa uma infinidade de planos perpendiculares a um plano dado, porque do ponto podemos sempre baixar uma perpendicular ao plano.
- 4.ª) Por uma reta não perpendicular a um plano pode-se traçar um plano perpendicular ao primeiro e somente um.

Sejam a reta AB e o plano P (fig. 36). Do ponto M de AB tracemos MR , perpendicular a P . As retas AB e MR determinam um plano Q , perpendicular a P por conter MR .

O plano Q é único porque o plano conduzido por AB e perpendicular a P deve conter a perpendicular MR , traçada de seu ponto M , e duas concorrentes determinam um plano.

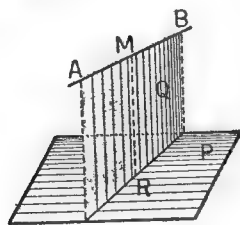


FIG. 36

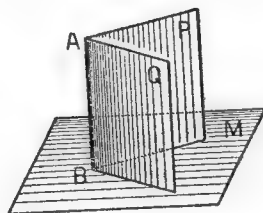


FIG. 37

QUARTO. Quando dois planos secantes são perpendiculares a um terceiro, sua intersecção é também perpendicular a êsse terceiro.

$$\text{Hip.: } \begin{cases} P \perp M \\ Q \perp M \end{cases} \quad \text{Tese: } AB \perp M$$

Demonstração.

Pelo ponto B , comum aos três planos, tracemos uma reta perpendicular ao plano M (fig. 37).

Em virtude do terceiro teorema, essa perpendicular deverá ficar situada simultaneamente nos planos P e Q ; logo, coincidirá com sua intersecção AB , o que demonstra o teorema.

QUINTO. O ângulo formado por duas retas perpendiculares às faces de um diedro e traçadas de um ponto interior é suplemento do diedro.

$$\text{Hip.: } \begin{cases} MC \perp Q \\ MD \perp P \end{cases} \quad \text{Tese: } M + AB = 180^\circ.$$

Demonstração.

As duas retas concorrentes MC e MD (fig. 38) determinam um plano que é perpendicular às faces P e Q , por conter retas perpendiculares às mesmas faces. Logo, o plano dessas concorrentes será também perpendicular à aresta do diedro, em virtude do quarto teorema. Assim, podemos concluir que o ângulo CED é retilíneo do diedro.

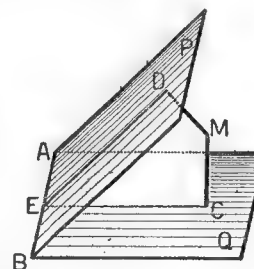


FIG. 38

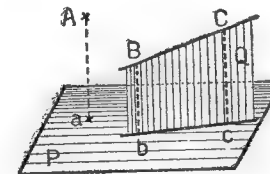


FIG. 39

No plano das concorrentes, os ângulos C e D do quadrilátero $MCED$ são retos por hipótese; logo, temos:

$$M + CED = 180^\circ$$

ou, substituindo o retilíneo pelo diedro que tem a mesma medida:

$$M + AB = 180^\circ$$

20. Projeções. Chama-se *projeção ortogonal* ou, simplesmente *projeção* de um ponto sobre um plano o pé da perpendicular traçada do ponto ao plano. A projeção do ponto A no plano P (fig. 39) é a .

Projeção de uma linha sobre um plano é o lugar geométrico das projeções dos diferentes pontos da linha dada.

A *projeção de uma reta sobre um plano é uma reta*. Realmente, seja a reta BC e o plano P , de projeção (fig. 39).

Tracemos, do ponto B , a perpendicular ao plano P ; b será a projeção de B . As retas BC e Bb determinam um plano Q , perpendicular ao plano P . A intersecção bc dos dois

planos é a projeção de BC , porque, se traçarmos de um ponto qualquer de BC uma perpendicular ao plano P , ela ficará contida em Q e terá seu pé sobre bc .

21. Ângulo de reta e plano.

TEOREMA. O ângulo agudo que uma reta oblíqua a um plano forma com sua projeção sobre o plano é o menor de todos os ângulos que a mesma reta forma com as contidas no plano.

Demonstração.

Seja o plano P e uma reta oblíqua AB (fig. 40).

Projetemos a reta sobre o plano. Seja α o ângulo formado com a projeção e β o ângulo que a mesma reta forma com outra qualquer, AC por exemplo, situada no plano (fig. 40).

Tomemos, sobre a reta AC do plano, um segmento AC igual à projeção Ab e tracemos BC .

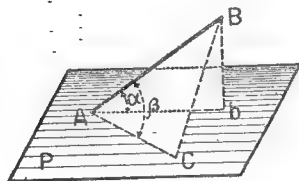


FIG. 40

Ficam, assim, formados os triângulos ABC e ABb que têm o lado AB comum, AC igual a Ab por construção e, finalmente, o lado Bb do segundo é menor que o lado BC do primeiro, porque a perpendicular é menor que qualquer oblíqua.

Assim, conclui-se que os triângulos são desiguais e ao maior lado opõe-se maior ângulo, isto é

$$B\hat{A}b < B\hat{A}C \quad \text{ou} \quad \alpha < \beta$$

Desta propriedade resulta a definição:

Ângulo de uma reta com um plano é o ângulo agudo que a reta forma com sua projeção sobre o plano.

22. Distância de duas retas.

TEOREMA. É sempre possível traçar uma perpendicular comum a duas retas não coplanares, e que as intercepte. Esta perpendicular é o menor segmento compreendido entre as duas retas

Demonstração. (fig. 41)

1.º) *A perpendicular existe e é única.* Sejam AB e CD duas retas não coplanares. Por um ponto arbitrário M de CD tracemos uma paralela a AB . As retas MN e CD determinam um plano P paralelo a AB , cuja intersecção com o plano das paralelas é MN (fig. 41).

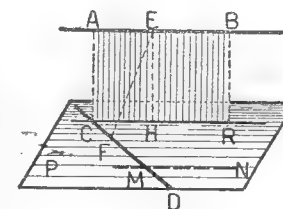


FIG. 41

Tracemos do ponto B a perpendicular BR ao plano P e, finalmente, pelo ponto R a paralela CR a AB . A reta CR ficará contida no plano P e interceptará CD no ponto C .

A reta CA , traçada por C e paralela a BR fica contida no plano das paralelas AB e CR e, portanto, intercepta AB .

A reta CA é perpendicular a AB e a CD porque, como paralela a BR é perpendicular ao plano P e, conseqüentemente, às retas CD e CR , dêsse plano. Mas, sendo perpendicular a CR , será também à sua paralela AB .

Como, pelo ponto C só se pode traçar uma paralela a BR , conclui-se que a perpendicular é única.

2.º) *A perpendicular é o menor segmento.* Seja o segmento EF que une dois pontos quaisquer E e F de cada uma das retas dadas. Tracemos EH , paralela a BR . EH é, portanto perpendicular ao plano P e igual a AC . Entre a perpendicular EH e a oblíqua EF ao plano P conclui-se a relação

$$EH < EF$$

e, portanto

$$AC < EF.$$

Dessa propriedade conclui-se a definição:

Distância entre duas retas é o segmento da perpendicular comum compreendido entre as retas dadas.

V) ÂNGULOS SOLIDOS. ESTUDO ESPECIAL DOS TRIEDROS

23. Definições.

Ângulo sólido ou poliédrico é a figura formada por três ou mais ângulos planos não coplanares, em número finito, que têm o vértice comum e, dois a dois, um lado comum (fig. 43).

No ângulo poliédrico há a considerar os elementos:

VERTICE, origem comum dos lados dos ângulos planos (ponto V);

FACES, ângulos planos que o formam;

ARESTAS, que são os lados dos ângulos planos;

DIEDROS, formados por duas faces que têm aresta comum.

Designa-se um ângulo sólido pela letra do vértice (ângulo V, fig. 43). Quando possa haver confusão, designa-se o ângulo pela letra do vértice e uma de cada aresta; na figura 42, o ângulo sólido inferior designa-se por $VABC$.

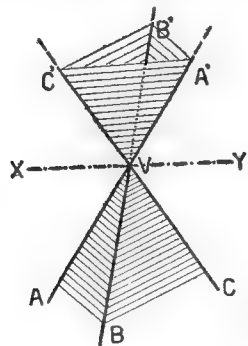


FIG. 42

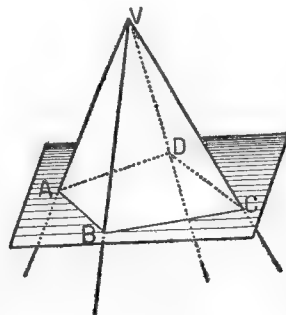


FIG. 43

Um ângulo diz-se *convexo*, quando fica todo situado do mesmo lado do plano de cada uma das faces. A secção plana que intercepta todas as arestas de um ângulo sólido convexo é um polígono convexo.

Os ângulos poliédricos classificam-se pelo número de faces.

24. Triedros.

Triedro é o ângulo sólido de três faces (fig. 42).

Os diedros dum triedro designam-se pelas letras da aresta ou por uma única letra. Diz-se *diedro VA* ou *diedro A*.

As faces designam-se pelas letras minúsculas correspondentes às letras dos diedros opostos. A face a é a oposta ao diedro A (fig. 44).

Dentre os triedros há a considerar os tipos particulares:

- retângulo, quando tem um diedro reto;
- birretângulo, quando tem dois diedros retos;
- trirretângulo, quando tem três diedros retos.

25. Triedros simétricos e suplementares. Dois triedros dizem-se *simétricos* ou *opostos* quando as arestas de cada um são os prolongamentos das arestas do outro. Na figura 42, os ângulos $VABC$ e $VA'B'C'$ são simétricos.

Os triedros simétricos têm os elementos respectivamente iguais, pois as faces são ângulos opostos pelo vértice e os diedros são opostos pela aresta; porém, em geral, não são congruentes, porque os elementos não têm a mesma *disposição*.

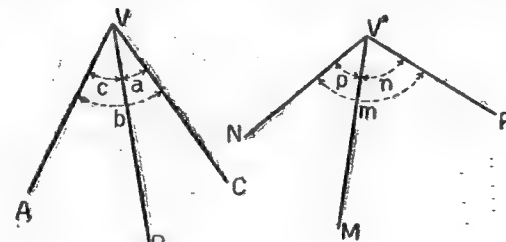


FIG. 44

Realmente, se supuzermos a rotação do triedro superior em torno do vértice V de modo que o ângulo $A'VC'$ coincida com seu igual AVC , a aresta VB' ficará atrás do plano do papel enquanto VB ficará na frente. Se, ao contrário, fizermos o triedro superior girar em torno do eixo xy , o diedro VB' coincidirá com seu igual VB , porém os outros dois não coincidem, pois VC' ficará do lado de VA , e VA' do lado de VC . A coincidência dar-se-á, apenas, no caso de serem iguais os dois diedros VA e VC .

Dois *triedros* dizem-se *suplementares* quando as faces de cada um são suplementos dos diedros do outro. Assim, os triedros V e V' (fig. 44), serão suplementares se tivermos:

$$\begin{array}{ll} a + M = 180^\circ & m + A = 180^\circ \\ b + P = 180^\circ & e \quad p + B = 180^\circ \\ c + N = 180^\circ & n + C = 180^\circ \end{array}$$

26. Propriedades dos ângulos sólidos.

1.ª) Em todo triedro uma face qualquer é menor que a soma das duas outras e maior que a diferença.

Seja o triedro V de faces a , b e c (fig. 45).

I) Supondo a a maior face o teorema será evidente para as duas outras; basta, portanto, provar a tese

$$a < b + c$$

Demonstração.

Sobre a face a tomemos um ângulo BVD igual à face c isto é:

$$BVD = c \quad (1)$$

A partir do vértice V tomemos, ainda, os segmentos:

$$VD = VA \quad (2)$$

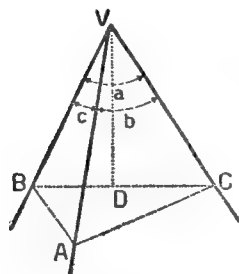


FIG. 45

Finalmente, pelos pontos A e D tracemos um plano qualquer que interceptará o triedro segundo um triângulo ABC .

De acordo com as construções (1) e (2) podemos concluir:

$$\triangle BVD = \triangle ABV \quad (\text{segundo caso}).$$

Dessa igualdade resulta:

$$AB = BD \quad (3)$$

Considerando o triângulo ABC temos:

$$BC < AB + AC$$

ou, subtraindo AB dos dois membros:

$$BC - AB < AC$$

ou, ainda, em virtude da igualdade (3):

$$CD < AC$$

Assim, os dois triângulos AVC e CVD têm dois lados iguais, (VC comum, $VA = VD$ por construção) e os terceiros

lados desiguais; logo, são desiguais, e ao maior lado corresponde maior ângulo, isto é:

$$CVD < b$$

somando os dois membros dessa desigualdade com os da igualdade (1), resulta:

$$a < b + c$$

II) De acordo com a primeira parte temos:

$$a < b + c \therefore a - b < c \quad \text{ou} \quad c > a - b$$

OBSERVAÇÃO. A propriedade estende-se a qualquer ângulo poliédrico.

2.ª) Em todo ângulo sólido convexo a soma das faces é menor que quatro retos.

Seja o ângulo sólido V (fig. 46). Representando por S_f a soma das faces, $a + b + c + d$, teremos a tese:

$$S_f < 360^\circ$$

Demonstração.

Tracemos um plano qualquer que corte todas as arestas do ângulo poliédrico. A intersecção será um polígono que terá tantos lados quantas forem as faces.

Em cada vértice do polígono fica formado um triedro. Assim, podemos concluir, de acordo com a propriedade anterior:

$$\begin{aligned} ABC &< VBA + VBC \\ BCD &< VCB + VCD \\ &\dots\dots\dots \end{aligned}$$

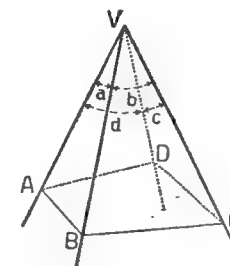


FIG. 46

Somando, membro a membro, a soma dos primeiros membros será a soma dos ângulos internos do polígono da secção, isto é, $180^\circ (n - 2)$, e a soma dos segundos membros será a soma dos ângulos internos de todos os triângulos excetuados os ângulos do vértice V e valerá portanto $180^\circ n - S_f$.

Assim temos:

$$180^\circ (n - 2) < 180^\circ n - S_f$$

ou

$$180^\circ n - 360^\circ < 180^\circ n - S_f$$

Simplificando os termos semelhantes e transpondo os negativos obtém-se a tese:

$$S_r < 360^\circ$$

3.ª) A todo triedro corresponde um suplementar que se obtém, traçando de um ponto interior ou do vértice perpendiculares às faces.

Hip.: $\begin{cases} V'A' \perp CVB \\ V'B' \perp CVA \\ V'C' \perp AVB \end{cases}$ Tese: $\begin{cases} a + A' = 180^\circ \\ b + B' = 180^\circ \\ c + C' = 180^\circ \end{cases}$ e $\begin{cases} a' + A = 180^\circ \\ b' + B = 180^\circ \\ c' + C = 180^\circ \end{cases}$

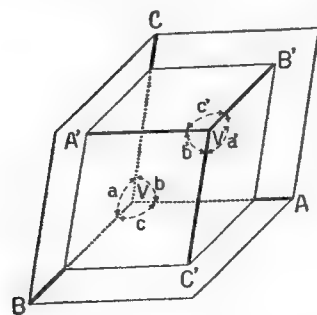


FIG. 47

Demonstração.

De acôrdo com a hipótese as retas $V'B'$ e $V'C'$ são perpendiculares às faces do diedro VA (fig. 47); logo, o ângulo das perpendiculares, isto é, a face a' , é suplemento do diedro. Conclui-se: $a' + A = 180^\circ$.

Analogamente, teremos:

$$b' + B = 180^\circ \text{ e } c' + C = 180^\circ.$$

Fica, assim, demonstrada uma parte da tese.

As retas $V'B'$ e $V'C'$ determinam um plano que é perpendicular às faces do diedro A , em virtude da hipótese; logo, será perpendicular à sua intersecção, isto é, à aresta VA , concluindo-se:

$$VA \perp B'V'C'$$

Considerando, análogamente, o plano determinado pelas retas $V'A'$ e $V'B'$, temos:

$$VC \perp A'V'B'$$

Assim, do ponto V ficam traçadas duas retas, VA e VC , perpendiculares às faces do diedro $V'B'$; logo, o ângulo dessas perpendiculares, isto é, a face b é suplemento do diedro considerado, concluindo-se:

$$b + B' = 180^\circ$$

Analogamente, obtém-se:

$$a + A' = 180^\circ \text{ e } c + C' = 180^\circ$$

e os triedros são suplementares.

27. Aplicação. De cada propriedade das faces de um triedro pode-se concluir uma propriedade dos diedros do mesmo, bastando para isso substituir as faces em relação aos diedros do triedro suplementar.

Exemplos:

1.ª) Consideremos a propriedade das faces:

$$a < b + c \quad (1)$$

Seja $V'A'B'C'$ o triedro suplementar. Podemos concluir:

$$\begin{aligned} a &= 180^\circ - A' \\ b &= 180^\circ - B' \\ c &= 180^\circ - C' \end{aligned}$$

Substituindo estes valores na desigualdade (1):

$$180^\circ - A' < 180^\circ - B' + 180^\circ - C'$$

Simplificando e transpondo os termos negativos, resulta:

$$B' + C' < A' + 180^\circ$$

Daí, a propriedade:

Em todo triedro a soma de dois diedros é menor que o terceiro aumentado de dois retos.

2.ª) Considerando a propriedade

$$0^\circ < a + b + c < 360^\circ$$

e substituindo as faces em relação aos diedros do suplemento, resulta:

$$0^\circ < 180^\circ - A' + 180^\circ - B' + 180^\circ - C' < 360^\circ$$

$$\text{ou } 0^\circ < 6r - (A' + B' + C') < 4r$$

ou, ainda, destacando as desigualdades:

$$6r - (A' + B' + C') < 4r$$

$$\text{e } 0^\circ < 6r - (A' + B' + C')$$

Donde finalmente:

$$2r < A' + B' + C'$$

e

$$A' + B' + C' < 6r$$

Temos, assim, a propriedade:

Em todo triedro a soma dos diedros é maior que dois é menor que seis retos.

28. Congruência de triedros.

PRIMEIRO CASO. Dois triedros são congruentes quando têm uma face igual adjacente a diedros respectivamente iguais e igualmente dispostos.

Sejam os triedros V e V' (fig. 48).

$$\text{Hip.: } \begin{cases} c = c' \\ VA = V'A' \\ VB = V'B' \end{cases} \quad \text{Tese: } V = V'$$

Demonstração.

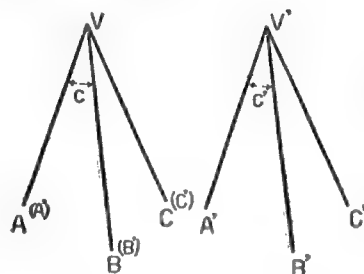


FIG. 48

Desloquemos o segundo triedro sobre o primeiro de modo que a face c' coincida com sua igual c . A aresta VA coincidirá com $V'A'$ e VB com $V'B'$.

Como os diedros VA e $V'A'$ são iguais, conclui-se que o plano $A'V'C'$ segue a direção de AVC . Da mesma forma o plano $B'V'C'$ segue a direção de BVC em virtude da igualdade dos diedros VB e $V'B'$. Coincidindo os planos coincidirão suas intersecções.

Assim, a aresta $V'C'$ coincidirá com VC e os triedros serão congruentes.

SEGUNDO CASO. Dois triedros são congruentes quando têm um diedro igual compreendido entre faces iguais e igualmente dispostas.

Sejam os triedros V e V' (fig. 49). Temos:

$$\text{Hip.: } \begin{cases} B = B' \\ c = c' \\ a = a' \end{cases} \quad \text{Tese: } V = V'$$

Demonstração.

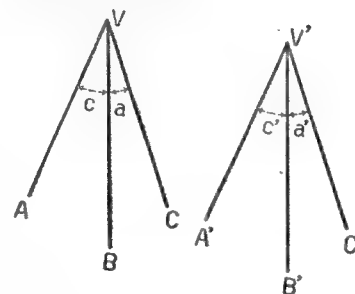


FIG. 49

Desloquemos o segundo triedro sobre o primeiro de modo que o diedro B' coincida com seu igual B . As faces do primeiro diedro seguirão pois a direção das faces do segundo. Como os ângulos a e a' são iguais, resulta a coincidência do lado VC com $V'C'$ e, da igualdade de c e c' , resulta análogamente a coincidência de $V'A'$ com VA .

Assim, os dois triedros têm as três arestas em coincidência e são congruentes.

TERCEIRO TEOREMA. Dois triedros são congruentes quando têm as três faces respectivamente iguais e igualmente dispostas.

Sejam os triedros V e V' (fig. 50). Temos:

$$\text{Hip.: } \begin{cases} a = a' \\ b = b' \\ c = c' \end{cases} \quad \text{Tese: } V = V'$$

Demonstração.

A partir dos vértices V e V' tomemos, sobre as arestas, os segmentos iguais $VA, VB, VC, V'A', V'B'$ e $V'C'$.

Os pontos A, B e C determinam um plano cuja secção com o triedro é o triângulo

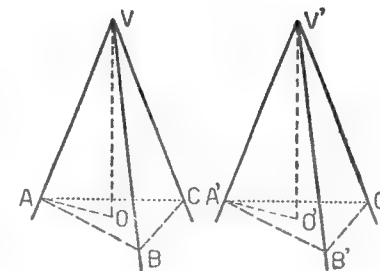


FIG. 50

ABC ; análogamente, no segundo triedro a secção plana será o triângulo $A'B'C'$.

Os triângulos formados nas faces dos dois triedros são respectivamente congruentes, em virtude do segundo caso, por terem dois lados iguais por construção, formando um ângulo igual por hipótese (*)

Da congruência dos triângulos formados nas faces podemos concluir:

$$\begin{aligned} AB &= A'B' \\ AC &= A'C' \quad \dots \\ BC &= B'C' \end{aligned} \quad (1)$$

e, portanto:

$$\triangle ABC = \triangle A'B'C'.$$

Finalmente, dos vértices V e V' , tracemos as perpendiculares VO e $V'O'$ aos planos das secções. Podemos, então, concluir que os pontos O e O' são os centros dos círculos circunscritos aos triângulos ABC e $A'B'C'$, em virtude da construção. Como os triângulos são congruentes, os raios OA e $O'A'$ desses círculos serão iguais.

Assim, os triângulos retângulos VOA e $V'O'A'$ têm hipotenusas iguais por construção e um cateto igual; são conseqüentemente congruentes e temos:

$$VO = V'O'$$

Se deslocarmos, então, o triângulo $A'B'C'$ de modo que coincida com seu igual ABC , o ponto O' coincidirá com O e, como de um ponto só se pode traçar uma perpendicular a um plano, $O'V'$ seguirá a direção de OV . O ponto V' coincide, pois, com o ponto V , em virtude da igualdade desses segmentos, e os triedros são congruentes.

(*) Matemática, 1.º ciclo — 3.ª Série.

QUARTO CASO. Dois triedros são congruentes quando têm os três diedros respectivamente iguais e igualmente dispostos.

Demonstração:

A todo triedro corresponde um suplementar. Se os dois triedros dados têm diedros iguais, podemos concluir que seus suplementares terão faces respectivamente iguais, como suplementos de diedros iguais. Resulta, portanto, que os triedros suplementares são congruentes em virtude do terceiro caso.

Da congruência dos triedros suplementares podemos concluir serem respectivamente iguais os seus diedros e conseqüentemente, serão também respectivamente iguais as faces dos triedros dados. Assim, os triedros dados são congruentes em virtude do terceiro caso.

EXERCÍCIOS

1. Quantos planos distintos são definidos por quatro pontos A, B, C, D , não complanares? *Resp.*: 4.
2. Três retas AB, BC e BD são concorrentes em B e não complanares. Quantos planos distintos elas definem? *Resp.*: 3.
3. Duas retas AB e CD são paralelas. Uma reta EF é concorrente com as duas paralelas. Quantos planos as três retas definem? *Resp.*: 1.
4. Unem-se os pontos médios de dois lados consecutivos de um quadrilátero reverso $ABCD$. Provar que o segmento obtido é paralelo ao plano determinado pelos dois outros lados.
5. Três planos paralelos determinam sobre uma reta S segmentos de 7 dm e 5 dm. Calcular os segmentos que os mesmos planos interceptam sobre uma segunda reta S' sabendo que o segmento da mesma compreendido entre os planos extremos mede 15 dm. *Resp.*: 6,25 dm e 8,75 dm.
6. Os planos paralelos P, Q, R e S determinam sobre uma reta os segmentos AB, BC e CD . Os pontos A e C são conjugados harmônicos do segmento BD . Calcular os segmentos $A'B', B'C'$ e $C'D'$ de uma reta interceptada pelos mesmos planos, sendo: $BD = 8$ m. $AC = 8,4$ m e $A'D' = 13$ m. *Resp.*: 5,57 m; 2,23 m e 5,2 m.
7. Dadas duas retas não complanares, conduzir por uma delas um plano paralelo à outra.

8. Por um ponto dado conduzir um plano paralelo a duas retas dadas.
9. Dois planos respectivamente paralelos a dois planos secantes são também secantes e sua intersecção é paralela à dos dois outros. Provar.
10. Calcular a distância de um ponto do espaço ao plano de um triângulo retângulo, cuja hipotenusa é a , sabendo-se que as oblíquas traçadas do ponto aos vértices do triângulo formam ângulos de 60° com o mesmo plano. *Resp.*: $\frac{a\sqrt{3}}{2}$.
11. Calcular a distância de um ponto do espaço ao plano de um triângulo equilátero de 6 m de lado, sabendo-se que o ponto equidista de 4,5 m dos vértices do triângulo. *Resp.*: 2,8 m.
12. Calcular a distância de um ponto A do espaço ao ponto B de um plano M , sendo dados:
 - 1) a distância do ponto A ao plano M é de 36 m;
 - 2) o ponto B está situado a 12 m do ponto de contacto da tangente ao círculo, cujo centro é o pé da perpendicular baixada do ponto A ao plano M e cujo raio é de 9 m. *Resp.*: 39 m.
13. Em um plano M está traçado um triângulo, cujos lados medem 6 cm, 8 cm e 10 cm, respectivamente. O ponto A , exterior ao plano, a equidistante dos três vértices do triângulo e a distância comum é igual ao diâmetro do círculo circunscrito ao triângulo. Calcular a distância do ponto A ao plano M . *Resp.*: $5\sqrt{3}$ cm.
14. Do ponto A , exterior ao plano M , descreve-se uma circunferência sobre o plano. Traça-se uma tangente BC à circunferência e une-se o ponto A ao ponto C . Calcular AC , com erro menor que um centímetro, sabendo-se que a distância do ponto A ao plano é de 12 m, que o raio OB tem 7 m e a tangente BC , 6 m. *Resp.*: 15,13 m.
15. Achar o lugar dos pontos do espaço equidistantes de dois pontos dados. *Resp.*: Plano mediador.
16. Achar o lugar dos pontos de um plano equidistantes de dois pontos dados fora do plano. *Resp.*: Intersecção do plano dado com o mediador do segmento que une os dois pontos.
17. Três planos paralelos são dispostos de modo que as distâncias do intermediário para cada um dos outros são, respectivamente, de 5 m e 9 m. Calcular os segmentos que os mesmos planos determinam sobre uma reta que lhes é oblíqua, sabendo que o segmento da mesma compreendido entre os planos extremos é de 25 m. *Resp.*: 8,93 m e 16,07 m.
18. De um ponto interior são traçados duas semi-retas perpendiculares às faces de um diedro. As perpendiculares formam um ângulo de $56^\circ 27'$. Qual a medida do diedro? *Resp.*: $123^\circ 33'$.

19. Uma reta perpendicular a uma das faces de um diedro forma com o plano bisetor do mesmo um ângulo de 36° . Calcular o retilíneo do diedro. *Resp.*: 108° .
20. Uma reta, perpendicular ao bisetor de um diedro, forma com uma das faces um ângulo de $48^\circ 36'$. Calcular o retilíneo do diedro. *Resp.*: $82^\circ 48'$.
21. O retilíneo de um diedro mede 120 gr. Calcular o ângulo que uma perpendicular ao bisetor forma com cada uma das faces. *Resp.*: 40 gr.
22. Demonstrar que qualquer ponto situado no bisetor de um diedro é equidistante das faces.
23. Dado um triedro trirretângulo pergunta-se a que distâncias do vértice, sobre as arestas, deve passar uma secção para que os lados do triângulo obtido tenham 8 m, 12 m e 10 m respectivamente. *Resp.*: 3,16 m, 7,35 m e 9,49 m.
24. Achar o lugar dos pontos equidistantes das faces de um diedro.
25. Achar o lugar dos pontos equidistantes das faces de um triedro.
26. Em todo triedro ao maior diedro opõe-se a maior face e reciprocamente. Provar.
27. Determinar o lugar dos pontos equidistantes das arestas de um triedro.
28. Num triedro, as faces a e b medem respectivamente 88° e 73° . Entre que valores está compreendida a face c ? *Resp.*: $15^\circ < c < 161^\circ$.
29. Num triedro, as faces a e b medem respectivamente 108° e 112° . Entre que valores poderá variar a face c ? *Resp.*: $4^\circ < c < 140^\circ$.
30. Três faces de um ângulo sólido tetraédrico medem respectivamente 140° , 70° e 30° . Entre que valores está compreendida a quarta face? *Resp.*: 120° e 40° .
31. Podem os diedros de um triedro medir respectivamente 50° , 30° e 20° ? *Resp.*: Não.
32. Dois diedros de um triedro medem respectivamente 140° e 120° . Entre que valores pode variar o terceiro diedro? *Resp.*: 80° e 160° .
33. Os diedros A e B de um triedro medem respectivamente 40° e 70° . Entre que valores pode variar o diedro C ? *Resp.*: $70^\circ < C < 150^\circ$.
34. Se um triedro for birretângulo, entre que valores pode variar o diedro não reto? *Resp.*: 0° e 180° .
35. Num triedro $V-ABC$, o menor diedro é A . Entre que valores pode variar a face a , se tivermos $b = 86^\circ$ e $c = 74^\circ$. *Resp.*: $12^\circ < a < 74^\circ$.
36. Num triedro $V-ABC$, a maior face é a . Entre que valores pode variar o diedro A , se tivermos $B = 90^\circ$ e $C = 120^\circ$. *Resp.*: $120^\circ < A < 150^\circ$.

37. Qual o caso de congruência de triedros que não tem correspondente nos triângulos? *Resp.*: quarto caso.
38. Se uma reta formar ângulos iguais com três outras que passam por seu pé num plano, será perpendicular ao plano. Demonstrar. (E. F. de Fil. da U. Minas Gerais, 1952).
39. Num triedro $V-ABC$, duas faces medem respectivamente 90° e 36° . Entre que valores poderá variar a terceira face? *Resp.*: 54° e 126° .
40. Corta-se um triedro trirretângulo por um plano de tal modo que a secção obtida seja um triângulo equilátero de lado igual a 6 m. Achar as distâncias do vértice aos pontos de intersecção do plano secante com as arestas e ao plano da secção. *Resp.*: 4,24 m e 2,44 m.
41. Do centro O de um triângulo equilátero de lado 6 cm levanta-se uma perpendicular OS ao plano do triângulo. Calcular o comprimento de OS de modo que o triedro de vértice S , obtido unindo o ponto S aos vértices do triângulo, seja trirretângulo. *Resp.*: $OS \cong 2,44$ cm.
42. Do centro O de um quadrado $ABCD$ de lado igual a 6 cm levanta-se a perpendicular ao plano do quadrado. Sobre essa perpendicular toma-se o segmento OS de 4 cm. Calcular a distância do ponto O ao plano SAB . *Resp.*: 2,4 cm.

Questões de Concurso

43. Dois ângulos de lados respectivamente paralelos são (E. N. E.).
44. A distância entre duas retas não coplanares é dada (E. N. E., 1958).
45. Um plano fica determinado por: 1... 2... 3... 4... (E. N. E.).
46. Ângulo de uma reta com um plano é, por definição, (E. N. E.).
47. Para que uma reta seja paralela a um plano é necessário e suficiente que (E. N. E., 1958).
48. Bissetor de um diedro é o lugar geométrico (E. Flu. E., 1958).
49. Se de um ponto traçarmos perpendiculares às faces de um diedro, o ângulo plano formado e o retilíneo do diedro são (E. Flu. E.).
50. Um ângulo poliédrico é convexo quando (E. Flu. E., 1958).
51. O lugar geométrico dos pontos do espaço equidistantes de três pontos não colineares é (E. P. U. C., 1958).
52. Ângulo poliédrico é (E. P. U. C., 1958).
53. O retilíneo de um diedro mede 120° . Um ponto P do bissetor dista 6 cm da aresta. Calcule a distância de P às faces. (E. Flu. E. — 59).
Resp.: $3\sqrt{3}$ cm.
54. O lugar geométrico dos pontos do espaço equidistantes de dois pontos dados é (E. N. E. — 1960).
55. O-lugar geométrico dos pontos equidistantes das faces de um diedro é (E. Flu. E. — 1960).

CAPÍTULO II

POLIEDROS

I) GENERALIDADES SÔBRE POLIEDROS

1. Definições. Poliedro é o corpo limitado por superfícies planas (fig. 51).

As porções de plano que limitam o poliedro chamam-se *faces*.

As intersecções de duas faces chamam-se *arestas*. Cada aresta é, pois, comum a duas faces. As arestas do poliedro são lados dos polígonos das faces.

Os vértices dos polígonos denominam-se *vértices* do poliedro (A , fig. 51); um vértice é comum a várias faces. Na fig. 51, I, o vértice A é comum a três faces, em II é comum a quatro. Assim, em cada vértice fica formado um ângulo sólido.

Diagonal é o segmento que une dois vértices não situados na mesma face. Na fig. 56 o segmento BH é uma diagonal do poliedro.

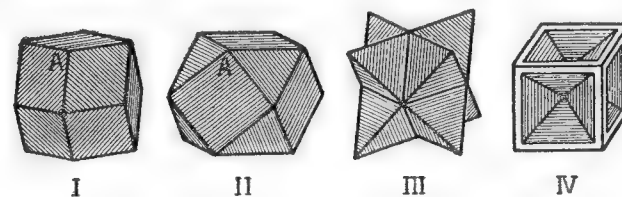


FIG. 51

2. Classificação. Os poliedros classificam-se em *convexos* e *não convexos*.

O poliedro diz-se convexo quando fica inteiramente situado do mesmo lado do plano de uma face qualquer. Na figura 51,

os poliedros I e II são convexos, enquanto que III e IV são não convexos.

Os poliedros podem, ainda, ser regulares ou não regulares. Diz-se regular quando tôdas as faces são polígonos regulares iguais e os ângulos sólidos são também iguais. Os poliedros da figura 52 são regulares convexos.

Em geral, os poliedros não são designados pelo número de faces, ao contrário do que acontece com os polígonos que se denominam pelo número de lados. Todavia, em certos casos, assim se designam, dizendo-se *tetcaedro* (quatro faces), *hexaedro* (seis faces), etc.

Estudaremos, apenas, os poliedros convexos; por esta razão, diremos simplesmente poliedros, subentendendo-se tratar-se de convexos.

3. Propriedades.

1.ª)

TEOREMA DE EULER. Em todo poliedro convexo a soma do número de vértices com o número de faces é igual ao número de arestas aumentado de duas unidades.

Demonstração.

Representemos, respectivamente, por V , F e A o número total de vértices, de faces e de arestas. Teremos, então, a tese:

$$V + F = A + 2.$$

Sejam v_1 e a_1 o número de vértices e arestas de uma primeira face qualquer. Como essa face é necessariamente um polígono, podemos concluir:

$$v_1 = a_1 \quad (1)$$

Se representarmos por v_2 e a_2 , v_3 e a_3 ... o número de vértices e arestas acrescentados ao poliedro quando são consideradas a segunda, a terceira, etc. faces; como a cada aresta que coincide com uma anterior, correspondem dois vértices

em coincidência, podemos concluir que o número de vértices acrescentados é sempre uma unidade menor que o número de arestas. Daí, as igualdades:

$$\begin{aligned} v_2 &= a_2 - 1 \\ v_3 &= a_3 - 1 \\ &\vdots \quad \vdots \quad \vdots \quad \dots \end{aligned} \quad (2)$$

Finalmente, quando se considera a última face nenhum vértice e nenhuma aresta serão acrescentados ao poliedro; logo, para a última face temos:

$$v_f = a_f \dots \quad (3)$$

Adicionando as igualdades (1), (2) e (3) membro a membro, virá:

$$V = A - (1 + 1 + \dots + 1) \dots \quad (4)$$

A cada igualdade considerada corresponde uma face, e a unidade figura em tôdas as igualdades, exceto em duas; logo, podemos concluir que o número de unidades é igual ao número de faces menos 2, isto é, $F - 2$. Substituindo em (4), teremos:

$$V = A - (F - 2) \quad \text{ou} \quad V = A - F + 2$$

donde, finalmente:

$$V + F = A + 2.$$

EXERCÍCIO

Um poliedro convexo tem três faces quadrangulares e quatro triangulares. Calcular o número de vértices, de faces e de arestas.

RESOLUÇÃO.

De acôrdo com o enunciado temos $F = 7$ e, portanto, podemos concluir, em virtude do teorema de Euler:

$$V + 7 = A + 2 \dots (1)$$

Nas três faces quadrangulares há, ao todo, 12 lados e nas quatro triangulares há, também, 12 lados; conclui-se que o número total de lados de tôdas as faces é 24. Como cada 2 lados se confundem em uma única

aresta, podemos concluir que o número total de lados é igual ao dobro do número de arestas, daí, a equação:

$$2A = 24 \quad (2)$$

Resolvendo o sistema das equações (1) e (2), virá:

$$A = 12 \quad \text{e} \quad V = 7.$$

2.a)

A soma dos ângulos internos de todas as faces de um poliedro convexo vale tantas vezes quatro retos quantos são os vértices menos dois.

$$\text{Tese: } S = 360^\circ (V - 2).$$

Demonstração.

Representemos por n_1 o número de lados da primeira face e, assim, sucessivamente, $n_2, n_3, \dots, n_f$ para as demais faces; e, ainda, por $S_1, S_2, \dots, S_f$ as somas dos ângulos internos de cada uma dessas faces.

De acordo com a fórmula conhecida de geometria plana, podemos concluir:

$$S_1 = 180(n_1 - 2)$$

$$S_2 = 180(n_2 - 2)$$

$$S_3 = 180(n_3 - 2)$$

$$\vdots$$

$$S_f = 180(n_f - 2)$$

Somando, membro a membro, vem:

$$S = 180[(n_1 + n_2 + n_3 + \dots + n_f) - (2 + 2 + 2 + \dots + 2)]$$

Como a soma do número de lados de todas as faces é igual ao dobro de arestas e a parcela 2 figura em todas as igualdades, temos:

$$S = 180(2A - 2F)$$

$$\text{ou,} \quad S = 360(A - F) \quad \dots \quad (1)$$

De acordo com o teorema de Euler, temos:

$$V + F = A + 2, \quad \text{donde} \quad A - F = V - 2.$$

Substituindo em (1), resulta, finalmente:

$$S = 360(V - 2).$$

II) POLIEDROS REGULARES

4. Teorema fundamental.

Existem apenas cinco poliedros regulares convexos

Demonstração.

De acordo com o teorema de Euler, temos:

$$V + F = A + 2 \quad \dots \quad (1)$$

Se o poliedro é regular, todas as faces são iguais e, portanto, todas terão o mesmo número n de lados. Resulta que o número total de lados das faces é nF e, como dois lados se confundem numa única aresta, temos a equação:

$$nF = 2A \quad \therefore \quad A = \frac{nF}{2} \quad (2)$$

Analogamente, se o número de lados que concorrem em cada vértice for p o número total desses lados será pV e, considerando que cada dois lados se confundem em uma aresta, conclui-se:

$$pV = 2A \quad \therefore \quad pV = nF \quad \text{e} \quad V = \frac{nF}{p} \quad (3)$$

Substituindo os valores de V e A na equação (1), vem:

$$\frac{nF}{p} + F = \frac{nF}{2} + 2$$

donde

$$(2n + 2p - np)F = 4p$$

$$F = \frac{4p}{2n + (2 - n)p} \quad (4)$$

e

Como $p \geq 3$, o numerador da última fração é positivo, e devemos ter também:

$$2n + (2 - n)p > 0$$

donde $(2 - n)p > -2n$

ou, multiplicando os dois membros por -1 :

$$(n - 2)p < 2n \quad \therefore \quad p < \frac{2n}{n - 2} \quad (5)$$

e, por ser $p \geq 3$: $\frac{2n}{n - 2} > 3$

resultando: $2n > 3n - 6$ e $n < 6$.

Daí, as três hipóteses: $n = 3$, $n = 4$ e $n = 5$.

Primeira hipótese: $n = 3$.

Em virtude da condição (5), resulta:

$$3 \leq p < 6$$

Existem, pois, três poliedros regulares de faces triangulares que correspondem aos valores:

$$p = 3, p = 4 \text{ e } p = 5.$$

Segunda hipótese: $n = 4$.

Temos, então (condição 5):

$$3 \leq p < 4$$

e o único valor de p é 3.

Existe apenas um poliedro regular de faces quadrangulares.

Terceira hipótese: $n = 5$.

Teremos:

$$3 \leq p < \frac{10}{3}$$

Logo, o único valor de p é 3 e existe apenas um poliedro regular de faces pentagonais.

5. Determinação dos elementos dos cinco poliedros regulares.

1.º Para $n = 3$ e $p = 3$, temos, em virtude das equações (4), (2) e (3):

$$F = 4, A = 6 \text{ e } V = 4.$$

O poliedro é o *tetraedro regular* (quatro faces).

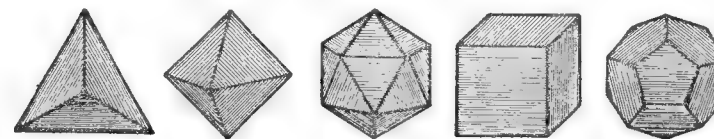


FIG. 52

2.º Para $n = 3$ e $p = 4$, resulta:

$$F = 8, A = 12 \text{ e } V = 6.$$

O poliedro é o *octaedro regular* (oito faces).

3.º Para $n = 3$ e $p = 5$, resulta:

$$F = 20, A = 30 \text{ e } V = 12.$$

O poliedro é o *icosaedro regular* (20 faces).

4.º Para $n = 4$ e $p = 3$, resulta:

$$F = 6, A = 12 \text{ e } V = 8.$$

O poliedro é o *cubo ou hexaedro regular* (seis faces).

5.º Para $n = 5$ e $p = 3$, conclui-se:

$$F = 12, A = 30 \text{ e } V = 20$$

O poliedro é o *dodecaedro regular* (doze faces).

Em resumo, temos o seguinte quadro dos elementos dos poliedros regulares convexos, onde ainda encontramos a natureza das faces (n) e a dos ângulos sólidos (p):

n	p	A	V	F	Nome
3	3	6	4	4	TETRAEDRO
	4	12	6	8	OCTAEDRO
	5	30	12	20	ICOSAEDRO
4	3	12	8	6	HEXAEDRO
5	3	30	20	12	DODECAEDRO

6. Área dos poliedros regulares em função da aresta.

1.º) **Tetraedro.** As faces do tetraedro são triângulos equiláteros que têm para lado a aresta do poliedro; logo, a área de uma face será:

$$s = \frac{a^2 \sqrt{3}}{4}$$

como o tetraedro tem quatro faces, conclui-se:

$$S = 4s = a^2 \sqrt{3}$$

2.º) **Hexaedro** ou **cubo.** As faces são quadrados que têm para lado a aresta do cubo. Assim, a área de uma face será:

$$s = a^2$$

como são seis faces, conclui-se:

$$S = 6a^2$$

3.º) **Octaedro.** As faces do octaedro são triângulos; logo, a área de uma face será:

$$s = \frac{a^2 \sqrt{3}}{4}$$

como são oito faces, conclui-se:

$$S = 8s = 2a^2 \sqrt{3}$$

4.º) **Dodecaedro.** As faces do dodecaedro são pentagonais. A área de uma face será:

$$s = \frac{a^2}{4} \sqrt{25 + 10\sqrt{5}}$$

Multiplicando por doze, teremos a área do poliedro:

$$S = 12s = 3a^2 \sqrt{25 + 10\sqrt{5}}$$

5.º) **Icosaedro.** O icosaedro tem vinte faces triangulares. Multiplicando a área do triângulo por 20, obteremos a área do poliedro, que será:

$$S = 20s = 5a^2 \cdot \sqrt{3}$$

7. **Poliedros conjugados** são poliedros tais que, tendo o mesmo número de arestas o número de vértices de cada um é igual ao de faces do outro.

Assim, o octaedro é conjugado do cubo (fig. 53) e o icosaedro, do dodecaedro. O conjugado do tetraedro é o próprio tetraedro.

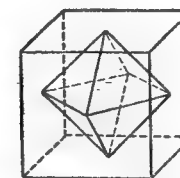


FIG. 53

EXERCÍCIOS

1. Um poliedro tem seis faces triangulares. Achar o número de arestas e de vértices. *Resp.: A = 9, V = 5.*

2. Um poliedro convexo tem seis faces quadrangulares e duas hexagonais. Calcular o número de arestas e de vértices. *Resp.*: 18 e 12.
3. Um poliedro convexo tem cinco faces quadrangulares e duas pentagonais. Calcular o número de arestas e de vértices. *Resp.*: 15 e 10.
4. Um poliedro tem quatro faces triangulares e uma quadrangular. Calcular o número de arestas e de vértices. *Resp.*: 8 e 5.
5. O icosaedro regular tem 12 vértices. Qual o número de arestas? *Resp.*: 30.
6. A soma dos ângulos das faces de um poliedro é 720° . Calcular o número de faces sabendo que é os $\frac{2}{3}$ do número de arestas. *Resp.*: 4.
7. Um poliedro convexo apresenta faces triangulares e quadrangulares. Se são ao todo 7 faces e o poliedro tem 7 vértices, achar o número de faces de cada espécie. *Resp.*: 4 triangulares e 3 quadrangulares.
8. A soma dos ângulos das faces de um poliedro é 1440° . Se o poliedro tiver 10 arestas, quantas serão as suas faces? *Resp.*: 6.
9. Qual o poliedro regular, cuja soma dos ângulos internos de todas as faces é 6480° ? *Resp.*: Dodecaedro.
10. Qual a soma dos ângulos das faces de um poliedro que tem 5 faces e 8 arestas? *Resp.*: 1080° .
11. Qual a soma dos ângulos das faces de um hexaedro que tem 9 arestas? *Resp.*: 1080° .
12. Num tetraedro regular $SABC$ provar que as arestas SA e BC são retangulares. (E. Militar, 1932).
13. O plano dos pontos médios de três arestas convergentes no mesmo vértice de um tetraedro regular é paralelo à face oposta àquela vértice. Provar.
14. Calcular a área total do tetraedro regular de 2 dm de aresta. *Resp.*: $6,93 \text{ dm}^2$.
15. Calcular, por logaritmos, a área total de um octaedro regular de 2,5 dm de aresta. *Resp.*: $21,65 \text{ dm}^2$.
16. A área total de um cubo sendo de 54 m^2 , qual o comprimento da aresta? *Resp.*: 3 m.
17. A soma dos ângulos internos de todas as faces de um poliedro regular tem 2160° e a aresta, 2 dm. Calcular a área total. *Resp.*: 24 dm^2 .
18. A área total de um cubo tem 96 cm^2 , calcular a área total do poliedro conjugado cujos vértices são os centros de suas faces. *Resp.*: $16\sqrt{3} \text{ cm}^2$.
19. Corta-se um tetraedro regular por um plano P paralelo a duas arestas opostas. Demonstrar que a secção feita por esse plano é um retângulo. Calcular a área dessa secção quando o plano P for equidistante das duas arestas opostas consideradas e a aresta do tetraedro tiver 10 m. (E. Técnica do Exército, 1947). *Resp.*: 25 m^2 .
20. A aresta de um octaedro regular tem 3 cm. Calcular a área total do hexaedro conjugado cujos vértices são os centros das faces do octaedro. *Resp.*: 12 cm^2 .

CAPÍTULO III

PRISMAS

1. Superfície prismática. Chama-se superfície prismática a superfície gerada por uma reta que se desloca paralelamente a uma direção fixa e apoiando-se sobre uma linha poligonal. Na figura 54 a *geratriz* AM , apoiando-se sobre a *diretriz* $ABCD$ gerou uma superfície prismática.

As retas AM , BN , etc. que passam pelos vértices do polígono diretor, chamam-se *arestas*.

A superfície prismática pode ser *fechada* ou *aberta* (fig. 54, 1.ª e 2.ª, respectivamente).

2. Propriedade das superfícies prismáticas fechadas.

Duas secções planas paralelas que interceptam todas as arestas são congruentes.

Sejam as secções planas paralelas $ABCD$ e $MNQR$ (fig. 54).

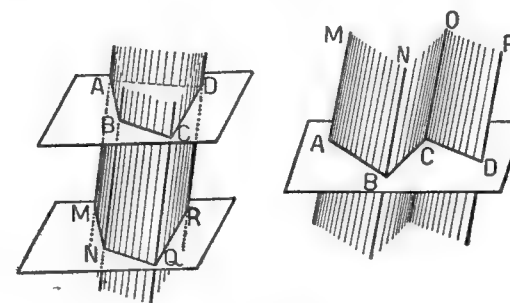


FIG. 54

Podemos concluir:

$$AB \parallel MN, \quad BC \parallel NQ, \quad CD \parallel QR, \quad AD \parallel MR,$$

porque as intersecções de dois planos paralelos com um terceiro são paralelas. Logo, os ângulos dos dois polígonos das

secções são iguais por terem os lados paralelos. Da mesma forma os lados são respectivamente iguais como lados opostos de paralelogramos.

Os dois polígonos das secções têm pois os lados e os ângulos respectivamente iguais e são congruentes.

3. Secção reta é a secção perpendicular as arestas. Duas secções retas são paralelas e, portanto, congruentes.

4. Prisma. Chama-se *prisma* o poliedro limitado por uma superfície prismática fechada e duas secções paralelas que interceptem tôdas as arestas (fig. 55).

As duas secções paralelas que limitam o poliedro chamam-se **bases** do prisma e são polígonos congruentes, em virtude da propriedade conhecida. As demais faces chamam-se **laterais** e são paralelogramos.

Altura dum prisma é a distância entre os planos das bases. Na figura 64, a altura do prisma é H .

5. Elementos dos prismas. Sendo n o número de lados da base, teremos, sendo A — número de arestas, V — de vértices e F — de faces:

$$F = n + 2, \quad A = 3n, \quad V = 2n.$$

6. Classificação dos prismas.

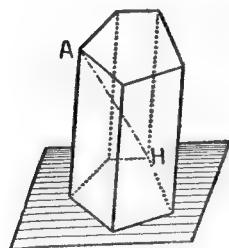


FIG. 55

Os prismas podem ser *retos* ou *obíquos*. O prisma é reto quando as arestas laterais são perpendiculares aos planos das bases; é obíquo, em caso contrário. Os prismas classificam-se ainda em triangulares, quadrangulares, etc., de acôrdo com o polígono das bases.

Prisma regular é o prisma reto, cuja base é um polígono regular.

7. Paralelepípedos. Quando as bases do prisma são, também, paralelogramos, o prisma recebe o nome *paralelepípedo*.

Os paralelepípedos podem ser *obíquos*, *retos* e *retângulos*. O paralelepípedo é *obíquo* quando as arestas laterais são

obíquas aos planos das bases (fig. 56). É *reto* quando as arestas laterais são perpendiculares aos planos das bases (fig. 57). As bases são, neste caso, paralelogramos e as faces laterais, retângulos. É *retângulo*, quando tôdas as faces são retângulos (fig. 59).

Chamam-se **dimensões** dum paralelepípedo retângulo os comprimentos das três arestas que concorrem no mesmo vértice. Na figura 57 as dimensões do paralelepípedo retângulo são a , b , e c .

Cubo é o paralelepípedo retângulo, cujas faces são quadrados. É o único prisma que é poliedro regular. As três dimensões do cubo são iguais.

8. Congruência de prismas.

Dois prismas retos de bases congruentes e da mesma altura são congruentes.

Realmente, se fizermos coincidir as bases inferiores congruentes, as arestas laterais tomarão, duas a duas, a mesma direção e, como são iguais, suas extremidades coincidirão. Conseqüentemente, coincidirão as bases superiores dos prismas.

9. Propriedades dos paralelepípedos. Por definição, as faces de um paralelepípedo são paralelogramos e ficam situadas, duas a duas, em planos paralelos; logo, podemos concluir:

a) **as arestas são iguais quatro a quatro.** Na figura 56, temos:

$$AE = BF = GG = DH;$$

$$AB = CD = EF = GH;$$

$$BC = AD = EH = FG,$$

como lados opostos de paralelogramos;

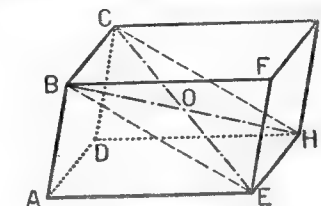


FIG. 56

b) **as quatro diagonais do paralelepípedo cortam-se ao meio** (fig. 56). Realmente, as diagonais BH e CE , por

exemplo, são também diagonais do paralelogramo $EHCB$; análogamente, concluíremos para duas outras diagonais. As diagonais do paralelepípedo retângulo são ainda iguais.

c) a secção que intercepta quatro arestas paralelas é um paralelogramo. Suponhamos a secção $MNRS$ (fig. 62).

Podemos concluir:

$$NR \parallel MS \quad \text{e} \quad MN \parallel RS,$$

pois, as intersecções de dois planos paralelos com um terceiro são paralelas. Logo, $MNRS$ é um paralelogramo.

10. Propriedade do paralelepípedo retângulo.

O quadrado da diagonal é igual à soma dos quadrados das três dimensões.

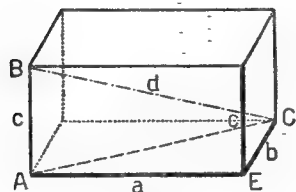


FIG. 57

Temos a tese:

$$d^2 = a^2 + b^2 + c^2.$$

Consideremos a diagonal BC e tracemos AC (fig. 57).

Como o paralelepípedo é retângulo, temos:

$$AB \perp AC$$

e o triângulo BAC é retângulo. O teorema de Pitágoras permite concluir:

$$d^2 = AC^2 + c^2 \quad \dots \quad (1)$$

Da mesma forma, considerando o triângulo ACE , também retângulo:

$$AC^2 = a^2 + b^2,$$

substituindo em (1), conclui-se:

$$d^2 = a^2 + b^2 + c^2$$

Consequência.

O quadrado da diagonal do cubo é igual ao triplo do quadrado da aresta. Realmente, o cubo é um paralelepípedo retângulo, cujas dimensões a , b e c são iguais; logo, teremos:

$$d^2 = a^2 + a^2 + a^2 \quad \therefore \quad d^2 = 3a^2 \quad \text{ou} \quad \boxed{d = a\sqrt{3}}$$

11. Áreas dos prismas.

Área lateral é a soma das áreas das faces laterais e área total é a de todas as faces.

a) A área total de um paralelepípedo retângulo é igual a soma dos duplos produtos das dimensões tomadas duas a duas.

As faces inferior e superior são retângulos iguais, de dimensões a e b ; logo, a área das duas faces será $2ab$ (fig. 57).

Analogamente, as faces anterior e posterior são retângulos de dimensões a e c e a área dessas duas faces será $2ac$. Finalmente, a área das duas últimas faces será $2bc$. Logo:

$$S_t = 2(ab + ac + bc)$$

OBSERVAÇÃO: Para o cubo, temos:

$$S_t = 2(a^2 + a^2 + a^2) = 6a^2 \quad (\text{Veja pág. 152}).$$

b) A área lateral de um prisma é igual ao produto do perímetro da secção reta pela aresta lateral. (fig. 58)

Seja o prisma P e a_l , a aresta lateral.

Tracemos a secção reta ABC . Os lados da secção reta são perpendiculares às arestas laterais; logo, serão as alturas dos paralelogramos das faces laterais. Calculando as áreas desses paralelogramos, teremos:

$$s_1 = AC \times a_l$$

$$s_2 = AB \times a_l$$

$$s_3 = BC \times a_l$$

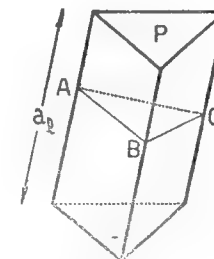


FIG. 58

Somando, membro a membro, e colocando a_i em evidência, resulta :
 $S_i = a_i \cdot (AC + AB + BC)$
 ou

$$S_i = 2p \times a_i$$

Consequência.

Se o prisma é reto, a secção reta é igual à base e a aresta lateral igual à altura; logo, para o prisma reto, teremos a fórmula:

$$S_i = 2ph$$

c) A área total de um prisma qualquer é igual à soma da área lateral com a área das duas bases.

Como as bases são iguais, conclui-se a fórmula:

$$S_t = S_i + 2S_b$$

Consequência.

No caso de ser o prisma regular, a base será um polígono regular; sendo a o apótema da base, conclui-se:

$$S_i = 2ph + 2pa$$

ou

$$S_t = 2p(h + a)$$

12. Volume dos prismas.

a) **Definições.** Unidade de volume é o volume do cubo cuja aresta é igual à unidade de comprimento.

Medir um volume é determinar a razão entre o volume dado e a unidade de volume; isto é, verificar quantas vezes o volume dado contém a unidade ou qualquer de suas partes alíquotas.

Dois sólidos que têm volumes iguais dizem-se **EQÜIVALENTES**. Observamos que dois sólidos eqüivalentes não são obrigatoriamente congruentes; mas, dois sólidos congruentes são necessariamente eqüivalentes.

Dois poliedros que têm uma face comum e são, inteiramente exteriores um em relação ao outro denominam-se **ADJACENTES**. Na figura 62 os dois poliedros FR e AR são adjacentes.

SOMA de dois poliedros é o poliedro que se obtém colocando-os na posição de adjacentes e suprimindo a face comum. Na figura 62 o poliedro BF é a soma dos poliedros FR e AR .

b) Teoremas fundamentais.

PRIMEIRO. Os volumes de dois paralelepípedos retângulos que têm duas dimensões iguais são proporcionais às terceiras dimensões.

Suponhamos o paralelepípedo P de dimensões a , b e c , e P' , de dimensões a , b e c' , isto é, com as dimensões a e b iguais (fig. 59).

Teremos a tese:

$$\frac{V}{V'} = \frac{c}{c'}$$

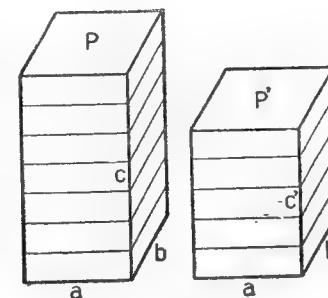


FIG. 59

Demonstração.

Dividamos as dimensões c e c' em partes iguais a um segmento α o que é sempre possível com erro tão pequeno quanto quisermos por ser α arbitrário. Teremos, então:

$$c = n\alpha$$

$$c' = p\alpha$$

Dividindo, membro a membro:

$$\frac{c}{c'} = \frac{n}{p} \quad (1)$$

Tracemos, pelos pontos de divisão de c e c' , planos paralelos às bases, como indica a figura 59 e obteremos, respectivamente, n e p paralelepípedos iguais, por terem bases iguais e a mesma altura a . Representando um desses paralelepípedos parciais por r , teremos, sendo V e V' os volumes dos paralelepípedos:

$$V = nr$$

$$V' = pr.$$

Dividindo, membro a membro, vem:

$$\frac{V}{V'} = \frac{n}{p}. \quad (2)$$

Comparando as igualdades (1) e (2), resulta:

$$\frac{V}{V'} = \frac{c}{c'}.$$

SEGUNDO. Os volumes de dois paralelepípedos retângulos estão entre si como os produtos de suas três dimensões.

Seja P um paralelepípedo de dimensões a , b e c e P' , de dimensões a' , b' e c' .

Teremos a tese:
$$\frac{V}{V'} = \frac{a \cdot b \cdot c}{a' \cdot b' \cdot c'}$$

Demonstração.

Construamos dois paralelepípedos auxiliares; o primeiro P_1 de dimensões a , b , c' e o segundo P_2 de dimensões a , b' , c' . (fig. 60). Teremos, de acordo com o teorema anterior:

$$\frac{V}{V_1} = \frac{c}{c'}$$

$$\frac{V_1}{V_2} = \frac{b}{b'}$$

$$\frac{V_2}{V'} = \frac{a}{a'}$$

Multiplicando, membro a membro:

$$\frac{V}{V'} = \frac{a b c}{a' b' c'}$$

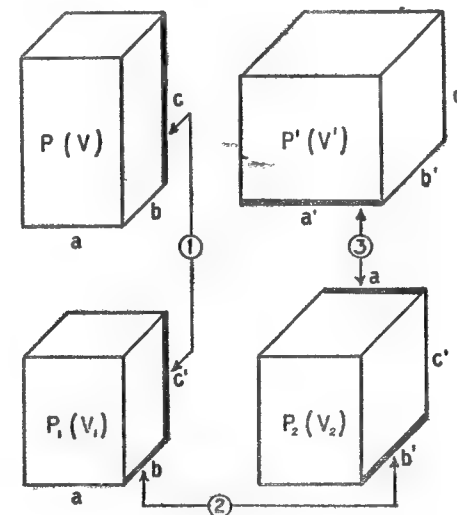


FIG. 60

TERCEIRO. Todo prisma oblíquo é equivalente a um prisma reto, cuja base é a secção reta e cuja altura é a aresta lateral do prisma oblíquo.

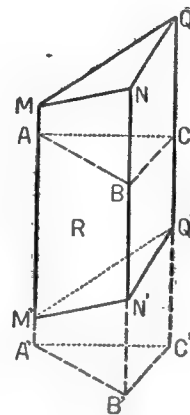


FIG. 61

Seja o prisma oblíquo $MNQM'N'Q'$ e ABC a secção reta (fig. 61).

Prolonguemos as arestas laterais e tomemos sobre os prolongamentos:

$$M'A' = MA, N'B' = NB \text{ e } Q'C' = QC.$$

Obteremos, assim, um prisma reto $ABCA'B'C'$, cuja base é a secção reta ABC e a altura AA' é, por construção, igual à aresta lateral do prisma dado.

O prisma oblíquo é a soma do sólido R com o poliedro $ABCMNQ$ e o prisma reto é a soma do sólido R com o poliedro $A'B'C'M'N'Q'$. Como os poliedros $ABCMNQ$ e $A'B'C'M'N'Q'$ são congruen-

tes, em virtude da construção, pois podem coincidir por uma translação representada pelo segmento AA' , podemos concluir a equivalência dos dois prismas.

c) Cálculo do volume.

I) Volume do paralelepípedo retângulo.

Por definição, unidade de volume é o volume do cubo, cuja aresta é igual à unidade de comprimento. Assim, se considerarmos o paralelepípedo retângulo de dimensões a , b , c (fig. 57), comparando-o com o cubo unidade (Q), concluiremos, em virtude do segundo teorema:

$$\frac{P}{Q} = \frac{abc}{l^3}$$

ou

$$\frac{P}{Q} = \frac{a}{l} \times \frac{b}{l} \times \frac{c}{l}.$$

A razão $\frac{P}{Q}$ é a medida do volume de P e as razões $\frac{a}{l}$, $\frac{b}{l}$, $\frac{c}{l}$, são as medidas dos comprimentos de suas dimensões.

Assim, podemos concluir:

medida $V = \text{medida } a \times \text{medida } b \times \text{medida } c$.

A medida do volume do paralelepípedo retângulo é igual ao produto das medidas de suas três dimensões.

Abreviadamente escreve-se:

$$V = abc$$

e diz-se:

O volume do paralelepípedo retângulo é igual ao produto das três dimensões.

Conseqüências.

1.ª) Como o produto das duas primeiras dimensões é a área da base e a terceira dimensão é a altura, o volume pode ser, também, expresso pela fórmula:

$$V = Bh$$

onde B representa a área da base e h , a altura, do paralelepípedo.

2.ª) O cubo é um paralelepípedo retângulo de dimensões iguais; temos, então:

$$V = a^3$$

II) Volume do paralelepípedo reto.

Seja P (fig. 62) um paralelepípedo reto. Se tomarmos para base a face AB , o paralelepípedo reto será um prisma oblíquo e, portanto, será equivalente ao prisma reto que tiver como base a secção reta $MNRS$ e para altura a aresta lateral AF . Como este prisma reto é um paralelepípedo retângulo, seu volume será:

$$V = MN \times MS \times AF.$$

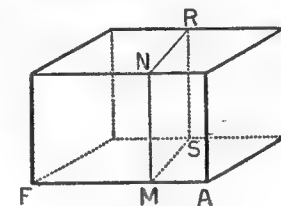


FIG. 62

O produto $MS \times AF$ dá a área do paralelogramo da base; representando-a por B e a altura correspondente, MN , por h , teremos a fórmula:

$$V = Bh$$

III) Volume do paralelepípedo oblíquo.

O paralelepípedo oblíquo (fig. 63) será um prisma oblíquo em relação à face AB ; logo, será equivalente ao prisma reto que tenha para base a secção reta $MNPQ$ e para altura a aresta lateral AC . Logo, teremos:

$$V = S_{MNPQ} \times AC$$

$MNPQ$ é um paralelogramo; logo, sua área será dada pelo produto $MQ \times NR$ e, teremos:

$$V = MQ \times AC \times NR$$

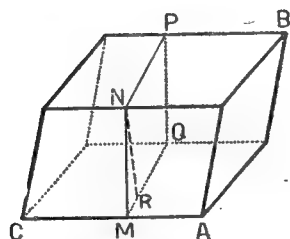


FIG. 63

O produto $MQ \times AC$ é a área da base do paralelepípedo dado e NR é sua altura; logo, podemos concluir a fórmula:

$$V = Bh$$

OBSERVAÇÃO: Conclui-se ser esta a fórmula geral do volume dos paralelepípedos.

IV) Volume dos prismas.

1.º) Consideremos o prisma triangular $ABCA'B'C'$ (fig. 64). Tracemos pelos pontos B e C , paralelas aos lados opostos da base correspondente e, análogamente, por B' e C' ; finalmente, unamos os pontos de intersecção D e D' . Resulta, dessa forma,

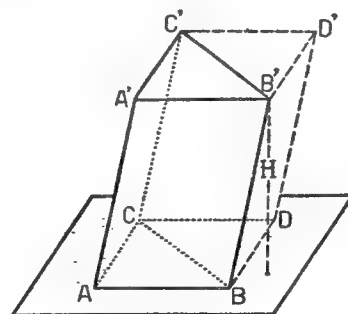


FIG. 64

um paralelepípedo, cujo volume V' será obtido multiplicando-se a área da base pela altura, isto é:

$$V' = S_{ABDC} \times h$$

Como os triângulos ABC e BCD são iguais, o prisma triangular é equivalente à metade do paralelepípedo. O volume do prisma triangular será, então:

$$V = \frac{S_{ABCD} \times h}{2}$$

Dividindo a área do paralelogramo por dois, como indica a última igualdade, obteremos a área do triângulo ABC , isto é, a área da base do prisma dado. Assim, resulta:

$$V = Bh$$

2.º) Consideremos o prisma qualquer da figura 65.

Tracemos as diagonais das duas bases, por dois vértices correspondentes, como A e A' . As diagonais correspondentes determinam planos que decompõem o prisma em prismas triangulares, cujas alturas são iguais à altura h do prisma dado.

Se representarmos as áreas das bases dos prismas triangulares por $s_1, s_2, s_3 \dots$ e os volumes por v_1, v_2, v_3 teremos:

$$\begin{aligned} v_1 &= s_1 h \\ v_2 &= s_2 h \\ v_3 &= s_3 h \end{aligned}$$

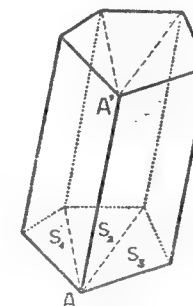


FIG. 65

Somando, membro a membro:

$$V = (s_1 + s_2 + s_3 + \dots) h$$

Como a soma $s_1 + s_2 + s_3 + \dots$ das áreas dos triângulos é igual à área B da base do prisma, temos a fórmula:

$$V = Bh$$

EXERCÍCIOS

- Calcular a área total e o volume de um cubo, cuja aresta tem 3 cm. *Resp.*: 54 cm² e 27 cm³.
 - A diagonal de um cubo tem 27 cm. Calcular a aresta, com erro menor que 1 cm. *Resp.*: 15,57 cm.
Preencha as lacunas dos exercícios abaixo, com os valores dos elementos incógnitos do cubo, sendo: a = aresta, d = diagonal do cubo, d' diagonal da face, S_t = área total, V = volume:
- | | a | d' | d | S_t | V |
|----|-------|----------------|---------------|-------------------|--------------------|
| 3. | 3 cm | | | | |
| 4. | | $4\sqrt{2}$ cm | | | |
| 5. | | | $5\sqrt{3}$ m | | |
| 6. | | | | 96 m ² | |
| 7. | | | | | 512 m ³ |
- A diagonal do quadrado da face de um cubo tem 2 dm. Calcular o volume. *Resp.*: 2,828 dm³.
 - A área total de um cubo mede 216 dm². Calcular o volume. *Resp.*: 216 dm³.
 - Achar a medida da aresta de um cubo, cuja área total é expressa pelo mesmo número que o volume. *Resp.*: 6.
 - Achar a razão entre as medidas da diagonal da face do cubo e a diagonal do cubo. *Resp.*: $\sqrt{6}/3$.
 - Se aumentarmos a diagonal de um cubo de 2 cm, a área total aumentará de 40 cm². Calcular a diagonal. *Resp.*: 4 cm.
 - Calcular a aresta de um cubo, sabendo que se a aumentarmos de 1 m, a área total do cubo aumentará de 42 m². *Resp.*: 3 m.
 - Calcular a aresta de um cubo, sabendo que se a aumentarmos 2 cm o volume do cubo aumentará de 26 cm³. *Resp.*: 1 cm. de
 - A aresta de um cubo tem 4 cm. O ponto O é o centro de uma face e AB , uma aresta da face oposta. Calcular a área do triângulo AOB . *Resp.*: 8,94 cm².
 - Calcular a área total de um paralelepípedo retângulo, cujas dimensões têm, respectivamente, 2 cm, 3 cm e 5 cm. *Resp.*: 62 cm².

- As dimensões de um paralelepípedo retângulo têm, respectivamente, 4 dm, 5 dm e 8 dm. Calcular a área total e o volume. *Resp.*: 184 dm² e 160 dm³.
- As dimensões de um paralelepípedo retângulo têm 3 dm, 4 dm e 12 dm. Calcular a diagonal. *Resp.*: 13 dm.
- A diagonal de um paralelepípedo retângulo tem 13 dm e a diagonal da base 5 dm. Calcular as dimensões, sendo a soma de todas as arestas igual a 76 dm. *Resp.*: 3 dm, 4 dm e 12 dm.
- Calcular o volume de um paralelepípedo retângulo, cuja diagonal tem 27 cm e cujas dimensões são proporcionais aos números 1, 4 e 8. *Resp.*: 864 cm³.
- Um paralelepípedo retângulo tem 376 dm² de área total e as dimensões são proporcionais aos números 3, 4 e 5. Calcular o volume. *Resp.*: 480 dm³.
- Um paralelepípedo retângulo tem 208 dm² de área total e as dimensões são proporcionais aos números 2, 3 e 4. Calcular o volume. *Resp.*: 192 dm³.
- As dimensões de um paralelepípedo retângulo estão em progressão aritmética de razão 2 e a área total é de 88 m². Calcular o volume. *Resp.*: 48 m³.
- Calcular as dimensões de um paralelepípedo retângulo, cuja área total é de 112 m², sabendo que estão em progressão geométrica de razão 2. *Resp.*: 2 m, 4 m e 8 m.
- A área total de um paralelepípedo retângulo é de 28 m² e o volume, 8 m³. Calcular as dimensões, que estão em progressão geométrica. *Resp.*: 1 m, 2 m, 4 m.
- Calcular o volume de um paralelepípedo retângulo em que a área total tem 52 m², a diagonal da base 5 m e a soma de todas as arestas 36 m. *Resp.*: 24 cm³.
- O volume de um paralelepípedo retângulo é de 1 620 dm³. Calcular as dimensões que são proporcionais a 3, 4 e 5. *Resp.*: 9 dm, 12 dm e 15 dm.
- Calcular a área total de um paralelepípedo retângulo cujo volume tem 216 m³ e as dimensões estão em progressão geométrica de razão 2. *Resp.*: 252 m².
- A soma das três dimensões de um paralelepípedo retângulo é 14 m. A área total tem 122 m² e a diagonal da base 5 m. Calcular as três dimensões. *Resp.*: 3, 4 e 7 metros.
- Calcular a área total de um prisma quadrangular regular, cujo lado da base tem 6 dm e a altura, 4 dm. *Resp.*: 168 dm².
- Calcular a área total e o volume de um prisma quadrangular regular, cujo lado da base tem 4 dm e a altura, 5 dm. *Resp.*: 112 dm² e 80 dm³.

32. Calcular o volume de um prisma hexagonal de 3 dm de altura, cuja área lateral é igual à área da base. *Resp.*: $216\sqrt{3}$ dm³.
33. Calcular o volume de um prisma triangular regular, cuja altura é igual ao perímetro da base e o apótema desta tem 3 cm. *Resp.*: 1 458 cm³.
34. Calcular o volume de um prisma quadrangular regular, cuja diagonal da face lateral mede 5 cm e a diagonal da base, 4,23 cm. *Resp.*: 36 cm³.
35. Calcular o volume de um prisma hexagonal regular, cuja diagonal da face lateral tem 10 cm e o apótema da base, 5,19 cm. *Resp.*: 747,36 cm³.
36. Calcular o volume de um prisma triangular regular, cuja altura é igual ao semiperímetro da base e o apótema desta tem 1 dm. *Resp.*: 27 dm³.
37. Num prisma triangular regular a área lateral é o quádruplo da área da base, cujo raio do círculo circunscrito tem 2 dm. Calcular o volume. *Resp.*: 10,392 dm³.
38. Num prisma reto a base é um losango de 6 cm de lado e cujos ângulos agudos têm 60°. A altura do prisma é igual à maior diagonal da base. Calcular o volume. *Resp.*: 324 dm³.
39. Calcular o volume de um paralelepípedo oblíquo cujas seis faces são losangos iguais de 3 dm de lado e cuja menor diagonal é igual ao lado. *Resp.*: 19,092 dm³.
40. Calcular o volume de um prisma triangular reto, cuja altura tem 4 cm e cuja base é um triângulo retângulo onde o cateto menor tem 6 cm e o perímetro, 24 cm. *Resp.*: 96 cm³.
41. Calcular a área total e o volume de um prisma triangular regular, cuja base tem 1,5 cm de apótema e cuja altura é o diâmetro da circunferência circunscrita à base. (E. Aeronáutica, 1942). — *Resp.*: 116,61 cm² e 70,065 cm³.
42. Calcular a área total e o volume de um prisma hexagonal regular cujo apótema da base é a e cuja altura é h . (E. Naval, 1944) *Resp.*: $4a\sqrt{3}(a+h)$ e $2a^2h\sqrt{3}$.
43. O volume de um prisma triangular é igual ao semi-produto da área de uma face lateral pela distância dessa face à aresta oposta. Provar.
44. O volume de um prisma regular é igual ao produto da área lateral pela metade do apótema da base. Provar.
45. É dado um prisma reto de base hexagonal regular, cujas arestas laterais são: $AA', BB', CC', DD', EE', FF'$

Corta-se esse prisma pelos planos:

$$AB'C, CD'E, EF'A, B'CD', D'EF', \text{ e } F'AB'$$

que dêle destacam seis pirâmides triangulares. Pede-se:

a) a forma geométrica do sólido restante;

- b) a relação entre a altura do prisma e o lado da base para que o sólido restante seja um poliedro regular (E. T. Ex. 1948) *Resp.*: $h = l\sqrt{2}$;
46. Calcular o volume de um prisma triangular, sendo os lados do triângulo da base respectivamente iguais a 3 m, 4 m e 5 m e a altura do prisma 5,8 m. (Fac. de Ciência Econom. da U. Minas Gerais, 1951). *Resp.*: 34,8 m³.
47. A área total de um paralelepípedo retângulo é de 94 m², a diagonal do poliedro mede $5\sqrt{2}$ m e a diagonal de uma face 5 m. Calcular o volume. *Resp.*: 60 m³.
48. A base de um prisma regular, com 60 m de altura, é um triângulo equilátero, cujo lado mede 12 m. Calcular o volume do prisma. (E. A. da U. Minas Gerais, 1945). *Resp.*: $2160\sqrt{3}$ m³.
49. Um paralelepípedo tem por faces seis losangos iguais, cujo lado é igual à diagonal menor. O lado dos losangos mede 6 dm. Calcular o volume do paralelepípedo. *Resp.*: 152,73 dm³.
50. Um prisma triangular regular tem altura igual a $\sqrt{3}$ dm. Calcular o volume, sabendo que é expresso pelo mesmo número que a área lateral. *Resp.*: 36 dm³.

Questões de Concurso em 1958:

51. Um poliedro é regular quando (E. N. E.).
52. Um poliedro de 11 vértices tem o mesmo número de faces triangulares e quadrangulares e uma face pentagonal. Calcule o número de faces desse poliedro. (E. N. E.). *Resp.*: 11.
53. Num prisma triangular oblíquo a secção reta é um triângulo equilátero de $9\sqrt{3}$ m² de área. A aresta lateral do prisma é igual a um dos lados da secção. Calcule, em m², a área lateral do prisma. (E. N. E.). *Resp.*: 108 m².
54. Diagonal de um poliedro é (E. Flu. E.).
55. Um prisma é regular quando (E. Flu. E.).
56. Calcule o número de vértices de um poliedro convexo de 4 faces quadrangulares e 8 faces triangulares. (E. Flu. E.). *Resp.*: 10.
57. Sobre cada uma das faces de um octaedro regular cuja aresta mede 2 cm, e exteriormente a esse poliedro, constrói-se um tetraedro regular de mesma aresta. Calcule a área total do poliedro assim formado. (E. Flu. E.). *Resp.*: $24\sqrt{3}$ cm².
58. Chama-se secção reta de um prisma (E. P. U. C.).
59. Aumentando a aresta de um cubo de $\sqrt{3}$ m obtém-se um outro cubo, cuja diagonal mede 15 m. Calcule a área total do cubo primitivo. (E. P. U. C.). *Resp.*: 288 m².

Questões de Concurso de 1959, 1960 e 1961.

60. Calcule a diagonal de um cubo, sabendo que se a aumentarmos de 3 cm a área total do cubo aumentará de 78 cm^2 . (E.E. Un. Rio de Janeiro — 1961). *Resp.*: 5 cm.
61. A seção reta de um prisma quadrangular oblíquo é um losango, cujas diagonais medem 18 cm e 24 cm. A aresta lateral é o quádruplo da distância entre dois lados paralelos da seção reta. Calcule a área lateral. (E.F.E. — 1960). *Resp.*: $4\,320 \text{ cm}^2$.
62. A altura de um prisma hexagonal regular é h . As diagonais maiores do prisma são iguais ao triplo das diagonais menores da base. Calcule o volume do prisma. (E.F.E. — 1960) *Resp.*: $\frac{3h^3 \sqrt{3}}{46}$
63. A seção reta de um prisma oblíquo é um losango de área 24 m^2 e as suas diagonais estão na razão de 4 para 3. Calcule a área lateral desse prisma sabendo que uma das arestas laterais mede 6 cm. (E.F.E. — 1960). *Resp.*: 120 cm^2 .
64. Calcule o volume de um prisma regular de seis faces, sabendo que a diagonal do prisma mede 13m e a diagonal da base 12m. (E.N.E. — 1960). *Resp.*: 260 m^2 .
65. A soma das três dimensões de um paralelepípedo retângulo é 15m e a área total 200 m^2 . Calcule a diagonal desse paralelepípedo. (E.P.U.C. — 1960). *Resp.*: 5m.
66. Os lados da seção reta de um prisma triangular medem, respectivamente, 5cm, $5\sqrt{3}$ cm e 10cm. Calcule a medida do menor ângulo diedro formado pelas faces laterais desse prisma. (E.F.E. — 1960). *Resp.*: 30° .
67. Dê a razão entre as áreas totais de dois cubos, sabendo-se que a aresta de um é a diagonal do outro. (E.N.E. — 1960). *Resp.*: $1/3$.

CAPÍTULO IV

PIRÂMIDES

I) PROPRIEDADES GERAIS

1. Definições.

Pirâmide é o poliedro limitado por um ângulo sólido e uma seção plana que intercepta todas as arestas e não passa pelo vértice.

O vértice do ângulo sólido denomina-se *vértice* da pirâmide (V, fig. 66). O polígono da seção chama-se *base* da pirâmide.

2. Elementos da pirâmide.

a) **Faces.** Em virtude da definição, as *faces laterais* de uma pirâmide são triangulares e a *base* é um polígono qualquer.

O número de faces laterais é igual ao número de lados da base. Assim, se o polígono da base tiver n lados e representarmos o número total de faces por F , teremos:

$$F = n + 1.$$

b) **Arestas.** Se percorrermos o contorno do polígono da base, a cada aresta da base corresponde uma aresta lateral; assim, se o polígono da base tiver n lados, o número total de arestas (A) será:

$$A = 2n$$

c) **Vértices.** Além do vértice da pirâmide há a considerar os vértices da base. Se o polígono da base tiver n lados, o número total (V) de vértices será:

$$V = n + 1,$$

pois há um único vértice fora da base.

- d) **Altura.** É a distância do vértice ao plano da base (h fig. 66).
- e) **Ângulos sólidos.** O ângulo sólido do vértice é, de um modo geral, um ângulo *poliédrico*, enquanto que os ângulos sólidos formados nos vértices da base são necessariamente *triedros*.

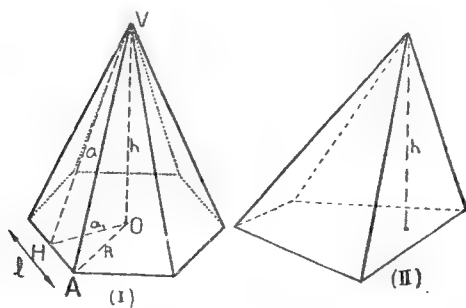


FIG. 66

3. Classificação.

As pirâmides classificam-se pelo número de lados do polígono da base em *triangulares*, *quadrangulares*, *pentagonais*, etc.

PIRÂMIDE REGULAR é a que tem por base um polígono regular e cujo pé da altura é o centro da base.

Na figura 66, a pirâmide (I) é *hexagonal regular*, a (II) é *quadrangular*.

Em particular a pirâmide triangular denomina-se *tetraedro* por ter *quatro* faces. O tetraedro, cujas quatro faces são triângulos equiláteros iguais é o poliedro regular denominado *tetraedro regular* (fig. 52, I).

4. Relações métricas nas pirâmides regulares. Na pirâmide regular (fig. 66, I) as arestas laterais são iguais, como oblíquas que se afastam igualmente do pé da perpendicular (ponto O). Assim, as faces laterais são *triângulos*

isósceles iguais. A altura VH de uma dessas faces denomina-se *apótema da pirâmide*.

Na pirâmide regular, os triângulos retângulos VOH , VOA e VHA (fig. 66, I), permitem concluir as relações:

$$a^2 = h^2 + a_1^2$$

$$f^2 = h^2 + R^2$$

$$f^2 = a^2 + \frac{l^2}{4}$$

onde a é o apótema da pirâmide; R , o raio da base; f , a aresta lateral; a_1 , o apótema da base; h , a altura da pirâmide e l , o lado da base.

5. Propriedades das pirâmides.

Conduzindo-se um plano paralelo à base de uma pirâmide:

- 1.º as arestas laterais e a altura ficam divididas em partes proporcionais;
- 2.º a secção plana é semelhante à base;
- 3.º a área do polígono da secção e a área da base são proporcionais aos quadrados das respectivas distâncias aos vértices.

1.º)

$$\text{Tese: } \begin{cases} 1) \frac{VA}{VA'} = \frac{VC}{VC'} = \frac{VB}{VB'} = \frac{VO}{VO'} \\ 2) ABC \sim A'B'C' \\ 3) \frac{S}{B} = \frac{VO'^2}{VO^2} \end{cases}$$

Demonstração.

Consideremos um terceiro plano passando pelo vértice V e paralelo à base (fig. 67).

Obtemos três planos paralelos: o plano M , o da secção e o da base.

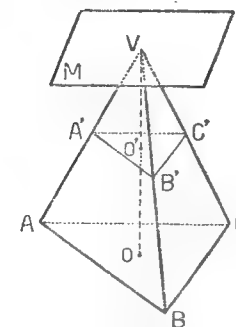


FIG. 67

1.º) Um feixe de planos paralelos divide duas transversais em partes proporcionais; logo:

$$\frac{VA}{VA'} = \frac{VB}{VB'} = \frac{VC}{VC'} = \frac{VO}{VO'}$$

ficando demonstrada a primeira parte da tese.

2.º) As intersecções de dois planos paralelos com um terceiro plano são paralelas, assim:

$$A'B' \parallel AB$$

$$A'C' \parallel AC$$

$$B'C' \parallel BC$$

Logo, os ângulos internos da secção são respectivamente iguais aos ângulos da base, por terem os lados paralelos.

Além disso, em virtude da lei linear de Tales, os triângulos formados nas faces das pirâmides são semelhantes; logo temos:

$$\frac{AB}{A'B'} = \frac{VB}{V'B'}, \quad \frac{BC}{B'C'} = \frac{VC}{V'C'}, \quad \frac{AC}{A'C'} = \frac{VA}{V'A'}.$$

Os segundos membros dessas razões são todos iguais em virtude da primeira parte; logo os primeiros também o serão, isto é:

$$\frac{AB}{A'B'} = \frac{BC}{B'C'} = \frac{AC}{A'C'}.$$

Assim, os dois polígonos têm os ângulos respectivamente iguais e os lados homólogos proporcionais e são, portanto, semelhantes.

3.º) De acordo com as propriedades dos polígonos semelhantes, as áreas são proporcionais aos quadrados de duas linhas homólogas quaisquer. Assim, sendo S a área da secção e B a área da base podemos concluir:

$$\frac{S}{B} = \frac{A'B'^2}{AB^2} \dots \quad (1)$$

A razão entre $A'B'$ e AB é igual à razão entre VB' e VB , em virtude da lei de Tales:

$$\frac{A'B'}{AB} = \frac{VB'}{VB}$$

ou, em virtude da primeira parte:

$$\frac{A'B'}{AB} = \frac{VO'}{VO}$$

substituindo em (1) tem-se, finalmente:

$$\frac{S}{B} = \frac{VO'^2}{VO^2}$$

2.ª)

Se duas pirâmides têm bases equivalentes e a mesma altura, as secções feitas à mesma distância do vértice são equivalentes.

Demonstração.

Seja S a área da primeira secção e S' a da segunda (fig. 68). Para a primeira pirâmide temos:

$$\frac{S}{B} = \frac{d^2}{h^2},$$

e para a segunda:

$$\frac{S'}{B} = \frac{d^2}{h^2}.$$

Comparando, conclui-se:

$$\frac{S}{B} = \frac{S'}{B} \dots \quad \boxed{S = S'}$$

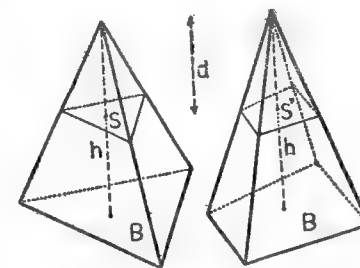


FIG. 68

6. Área das pirâmides.

a) *Pirâmide qualquer.* O cálculo da área lateral ou total de uma pirâmide qualquer só pode ser feito calculando-se as áreas de cada uma das faces, separadamente.

b) Pirâmide regular.

1.º) **ÁREA LATERAL.** As faces da pirâmide regular (fig. 66) são triângulos isósceles iguais, que têm para base o lado l do polígono da base da pirâmide e cuja altura é o apótema a da pirâmide; logo, a área s de uma face lateral será:

$$s = \frac{l \cdot a}{2}$$

O número de triângulos é igual ao número de lados da base. Assim, representando por n este número, teremos:

$$S_l = n \times \frac{l \times a}{2} = \frac{(nl) \times a}{2}$$

como nl é o perímetro $2p$ da base, resulta:

$$S_l = pa$$

2.º) **ÁREA TOTAL.** Para se obter a área total devemos somar a área lateral com a da base.

Como a base é, por hipótese, um polígono regular, a área será $p \times a_1$, donde: $S_t = p \times a + p \times a_1$ ou

$$S_t = p(a + a_1)$$

7. Volume da pirâmide.

a) Teoremas fundamentais.

PRIMEIRO. Duas pirâmides triangulares de bases equivalentes e da mesma altura são equivalentes.

$$\text{Hip.: } \begin{cases} S_1 = S_2 \\ h \text{ comum} \end{cases} \quad \text{Tese: } V = V'$$

Demonstração.

Dividamos as alturas em partes iguais e, pelos pontos obtidos, tracemos planos paralelos às bases, como indica a figura 69. As secções resultantes são respectivamente equivalentes, de acordo com a segunda propriedade.

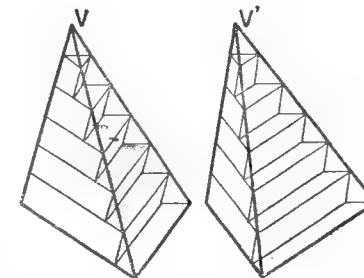


Fig. 69

Assim, se, pelos pontos de divisão de duas arestas, traçarmos, paralelas às terceiras arestas, como mostra a figura 69, no interior de cada pirâmide ficará formada uma série de prismas, onde dois prismas triangulares correspondentes de cada série são equivalentes, por terem bases equivalentes e a mesma altura.

Podemos, portanto concluir que a soma dos volumes dos prismas construídos na primeira pirâmide é igual à soma dos volumes dos construídos na segunda.

Se aumentarmos o número de divisões da altura, o número de prismas de cada série tornar-se-á também maior e a soma dos volumes dos prismas se aproximará sempre mais do volume da pirâmide. Como as somas dos volumes dos prismas são iguais, por terem parcelas iguais, conclui-se que os volumes das pirâmides também o serão.

Consequência.

Deslocando-se o vértice de uma pirâmide triangular sobre um plano paralelo ao plano da base, o volume não se altera, pois a base e a altura permanecem as mesmas.

SEGUNDO. Todo prisma triangular pode ser decomposto em três pirâmides triangulares equivalentes.

Seja o prisma $A B C D E F$ (fig. 70).

Considerando o plano das concorrentes AE e AF , o prisma fica decomposto em duas pirâmides: a primeira ($ADEF$), triangular e a segunda ($ABCFE$), quadrangular.

Traçando BF , o plano das concorrentes BF e BA divide a última pirâmide nas duas triangulares, $ABCF$ e $ABFE$, que são equivalentes, por serem iguais os triângulos das bases e a altura comum (distância do ponto A ao plano $BCFE$).

Da mesma forma, a primeira pirâmide ($ADEF$) é equivalente à segunda ($ABCF$) pois os triângulos DEF e ABC são iguais e a altura de ambas é a altura do prisma.

Assim, as três pirâmides são equivalentes.

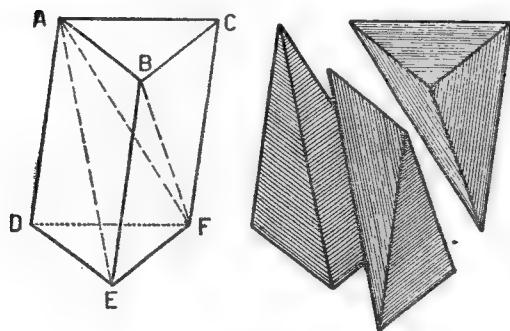


FIG. 70

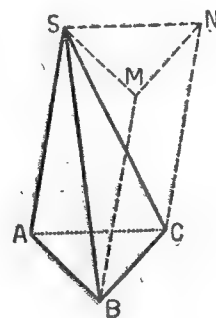


FIG. 71

b) Cálculo do volume da pirâmide.

O volume de uma pirâmide é igual a um terço do produto da área da base pela altura.

Demonstração.

1.º Consideremos uma pirâmide triangular $SABC$ (fig. 71).

De acordo com o segundo teorema, o volume dessa pirâmide será um terço do volume do prisma $ABCMNS$, da mesma altura, pois o mesmo prisma pode ser decomposto em três pirâmides triangulares equivalentes, sendo uma delas a pirâmide dada $SABC$.

Representando por V' o volume do prisma e por V , o da pirâmide, teremos:

$$V = \frac{V'}{3}$$

Substituindo o volume V' do prisma pelo valor conhecido (Bh), conclui-se:

$$V = \frac{Bh}{3}$$

2.º Consideremos uma pirâmide qualquer $S A B C D E \dots$ (fig. 72).

Tracemos, do vértice A , as diagonais do polígono da base. Estas diagonais e o vértice da pirâmide determinam planos que dividem a pirâmide dada em pirâmides triangulares.

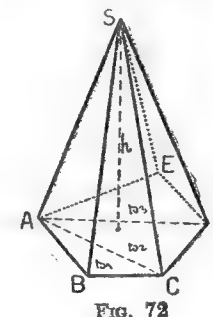


FIG. 72

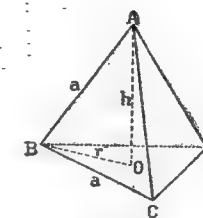


FIG. 73

Assim, se representarmos por $v_1, v_2, v_3 \dots$ os volumes e por $s_1, s_2, s_3 \dots$ as áreas das bases das pirâmides triangulares, teremos, de acordo com a primeira parte, por ser a altura h comum a todas as pirâmides:

$$v_1 = \frac{s_1 h}{3}, v_2 = \frac{s_2 h}{3}, v_3 = \frac{s_3 h}{3}, \dots$$

Somando membro a membro, conclui-se:

$$V = \frac{h}{3} (s_1 + s_2 + \dots).$$

Como a soma das áreas dos triângulos é igual a área da base da pirâmide dada, conclui-se, finalmente:

$$V = \frac{Bh}{3}$$

8. Aplicações.

1.ª) *Volume do tetraedro regular em função da aresta.* Temos a fórmula:

$$S = \frac{Bh}{3} \dots \quad (1)$$

A base é um triângulo equilátero, logo:

$$B = \frac{a^2 \times \sqrt{3}}{4} \quad (2)$$

Como as arestas laterais são iguais, a altura AO (fig. 73) terá o pé no centro do círculo circunscrito ao triângulo da base. Assim, OB é o raio desse círculo e o triângulo retângulo AOB permite concluir:

$$h^2 = a^2 - r^2,$$

ou, substituindo r por seu valor $\frac{a}{\sqrt{3}}$ (pois $a = r \cdot \sqrt{3}$):

$$h^2 = a^2 - \frac{a^2}{3} = \frac{2a^2}{3} \dots h = \frac{a\sqrt{2}}{\sqrt{3}} \dots \quad (3)$$

Substituindo os valores (2) e (3) em (1) resulta, finalmente, a fórmula:

$$V = \frac{a^3 \sqrt{2}}{12}$$

2.ª) *Volume do octaedro regular.* O octaedro regular é a soma de duas pirâmides quadrangulares $SABCD$ e $S'ABCD$ (fig. 74). A base, comum às duas pirâmides, é um quadrado de lado a e as alturas são, SO e $S'O$. Logo, o volume será a soma:

$$V = \frac{1}{3} \cdot a^2 \cdot SO + \frac{1}{3} a^2 \cdot SO' = \frac{1}{3} a^2 \cdot SS'.$$

SS' é igual à diagonal AC do quadrado de lado a ; logo temos:

$$SS' = a\sqrt{2}$$

e, portanto:

$$V = \frac{1}{3} a^2 \cdot a\sqrt{2}$$

ou

$$V = \frac{a^3 \sqrt{2}}{3}$$

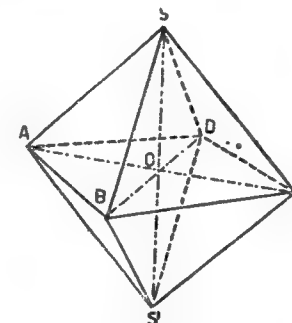


FIG. 74

II) TRONCOS DE PIRÂMIDE E PRISMA

9. *Tronco de pirâmide.* Tronco de pirâmide de bases paralelas é a parte da pirâmide compreendida entre a base e uma secção plana que lhe é paralela (fig. 75, I). A base da pirâmide e o polígono da secção denominam-se bases do tronco.

Tronco de pirâmide regular é o tronco de bases paralelas originado de uma pirâmide regular. As faces laterais, são trapézios isósceles iguais cuja altura denomina-se *apótema do tronco* (AH , fig. 75, I).

Chama-se tronco de pirâmide de segunda espécie, o sólido compreendido entre a base de uma pirâmide e a secção plana que intercepta os prolongamentos das arestas laterais (75, II).

10. Área lateral do tronco de pirâmide regular. A área s_1 de uma face lateral, que é um trapézio, será (fig. 75):

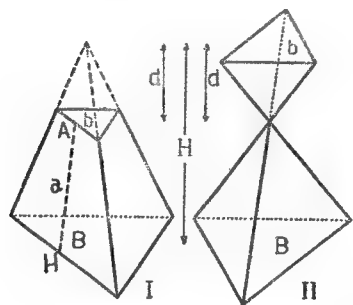


FIG. 75

$$s_1 = \frac{l + l'}{2} \times a,$$

onde l e l' são, respectivamente, o lado da base e da seção e a , o apótema do tronco. Assim, a área lateral será n vezes a área de uma face lateral, isto é:

$$S_l = \frac{n(l + l')}{2} \times a.$$

Os produtos nl e nl' são os perímetros da base e da seção; representando-os por $2p$ e $2p'$, teremos:

$$S_l = \frac{2p + 2p'}{2} \times a,$$

donde, finalmente, a fórmula:

$$S_l = (p + p')a$$

11. Área total do tronco de pirâmide regular. Para obter a área total, basta adicionarmos à área lateral as áreas das bases, que são polígonos regulares. Assim, teremos:

$$S_t = (p + p')a + pa_1 + p'a_2 = pa + p'a + pa_1 + p'a_2,$$

onde, a_1 e a_2 são, respectivamente, o apótema da base e de seção. Daí a fórmula:

$$S_t = p(a + a_1) + p'(a + a_2)$$

12. Volume dos troncos de pirâmide.

a) *Volume do tronco de primeira espécie.* Representemos por V' o volume da pirâmide total e V'' o da pirâmide

parcial, figura 75, I. O volume do tronco de primeira espécie será dado pela equação:

$$V = V' - V'' \dots \quad (1)$$

Representando por H a altura da pirâmide total e d a distância do vértice à seção e, ainda, por B e b as áreas da base e da seção, teremos, de acordo com a fórmula do volume da pirâmide:

$$(2) \quad \begin{cases} V' = \frac{B \times H}{3} \\ V'' = \frac{b \times d}{3} \end{cases}$$

De acordo com a propriedade das pirâmides, temos:

$$\frac{B}{H^2} = \frac{b}{d^2}$$

donde:

$$\frac{\sqrt{B}}{H} = \frac{\sqrt{b}}{d}$$

Aplicando a propriedade das proporções relativa à diferença dos antecedentes, temos:

$$\frac{\sqrt{B} - \sqrt{b}}{H - d} = \frac{\sqrt{B}}{H} = \frac{\sqrt{b}}{d}.$$

Substituindo a diferença $H - d$ pela altura h do tronco, dado, resulta:

$$\frac{\sqrt{B} - \sqrt{b}}{h} = \frac{\sqrt{B}}{H} = \frac{\sqrt{b}}{d}, \text{ donde } \dots \left\{ \begin{array}{l} H = \frac{h \sqrt{B}}{\sqrt{B} - \sqrt{b}} \\ d = \frac{h \sqrt{b}}{\sqrt{B} - \sqrt{b}} \end{array} \right.$$

Substituindo os valores de H e d em (2), resulta:

$$V' = \frac{h \sqrt{B^3}}{3(\sqrt{B} - \sqrt{b})} \quad \text{e} \quad V'' = \frac{h \sqrt{b^3}}{3(\sqrt{B} - \sqrt{b})}$$

donde, de acôrdo com a igualdade (1):

$$V = \frac{h}{3} \left(\frac{\sqrt{B^3}}{\sqrt{B} - \sqrt{b}} - \frac{\sqrt{b^3}}{\sqrt{B} - \sqrt{b}} \right)$$

ou

$$V = \frac{h}{3} \times \frac{(\sqrt{B})^3 - (\sqrt{b})^3}{\sqrt{B} - \sqrt{b}}$$

Efetuando a divisão da diferença das potências pela diferença das bases:

$$V = \frac{h}{3} \times (B + b + \sqrt{Bb})$$

b) **Volume do tronco de segunda espécie.** Conservando as mesmas notações, teremos para o tronco de segunda espécie (fig. 75, II):

$$V = V' + V'' \quad (1)$$

Sendo:

$$V' = \frac{B \times H}{3} \quad \text{e} \quad V'' = \frac{bd}{3} \quad (2)$$

Como no caso anterior, teremos a proporção:

$$\frac{\sqrt{B}}{H} = \frac{\sqrt{b}}{d};$$

$$\text{donde:} \quad \frac{\sqrt{B} + \sqrt{b}}{H + d} = \frac{\sqrt{B}}{H} = \frac{\sqrt{b}}{d},$$

ou, por ser $H + d = h$:

$$\frac{\sqrt{B} + \sqrt{b}}{h} = \frac{\sqrt{B}}{H} = \frac{\sqrt{b}}{d} \dots \left\{ \begin{array}{l} H = \frac{h \sqrt{B}}{\sqrt{B} + \sqrt{b}} \\ d = \frac{h \sqrt{b}}{\sqrt{B} + \sqrt{b}} \end{array} \right.$$

Substituindo os valores em (2):

$$V' = \frac{h \sqrt{B^3}}{3(\sqrt{B} + \sqrt{b})} \quad \text{e} \quad V'' = \frac{h \sqrt{b^3}}{3(\sqrt{B} + \sqrt{b})}$$

e levando êstes últimos em (1):

$$V = \frac{h \sqrt{B^3}}{3(\sqrt{B} + \sqrt{b})} + \frac{h \sqrt{b^3}}{3(\sqrt{B} + \sqrt{b})}$$

$$\text{ou} \quad V = \frac{h}{3} \times \frac{\sqrt{B^3} + \sqrt{b^3}}{\sqrt{B} + \sqrt{b}}$$

donde, finalmente, efetuando a divisão, obtém-se a fórmula:

$$V = \frac{h}{3} (B + b + \sqrt{Bb})$$

13. Troncos de prisma. *Tronco de prisma* é o sólido limitado por uma superfície prismática e duas secções não paralelas cuja intersecção é exterior à superfície e que interceptem tôdas as geratrizes. A figura 76 apresenta um tronco de prisma triangular.

As faces laterais de um tronco de prisma são, em geral, trapézios, podendo ocorrer que uma das faces seja um paralelogramo.

14. Área lateral do tronco de prisma. As faces laterais de um tronco de prisma reto são trapézios retângulos.

No caso particular do tronco de prisma regular, as alturas dêsses trapézios serão iguais ao lado, l , da base (fig. 76). Assim, a área lateral será obtida efetuando-se a soma das áreas dessas faces, e teremos (fig. 76):

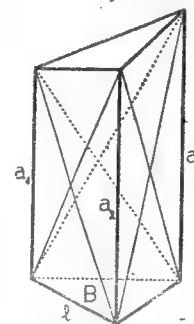


FIG. 76

$$S_l = \frac{a_1 + a_2}{2} \times l + \frac{a_2 + a_3}{2} \times l + \frac{a_1 + a_3}{2} \times l,$$

ou,
$$S_l = \frac{l}{2} (2a_1 + 2a_2 + 2a_3)$$

donde, finalmente:

$$S_l = l(a_1 + a_2 + a_3)$$

A área lateral de um tronco de prisma regular obtém-se, multiplicando a soma das arestas laterais pelo lado da base.

15. Área total. A área total obtém-se somando a área lateral com as áreas das duas bases. Nenhuma fórmula cômoda pode ser obtida para o cálculo dessa área, pois, embora seja regular o prisma truncado, a secção não será um polígono regular

16. Volume do tronco de prisma.

a) Teorema fundamental.

O tronco de prisma triangular é equivalente à soma de três pirâmides que têm por base comum uma das bases do tronco e cujos vértices são os da outra base.

Seja o tronco $ABCMNP$ (fig. 77, I), teremos a tese:

$$V_{ABCMNP} = V_{NABC} + V_{MABC} + V_{PABC}.$$

Demonstração.

As concorrentes NA , NC e MC determinam dois planos NAC e NMC que decompõem o tronco nas três pirâmides $NMAC$, $NMPC$ e $NABC$, destacadas nas figuras II, III e IV, e cujos volumes representaremos por V_{II} , V_{III} e V_{IV} .

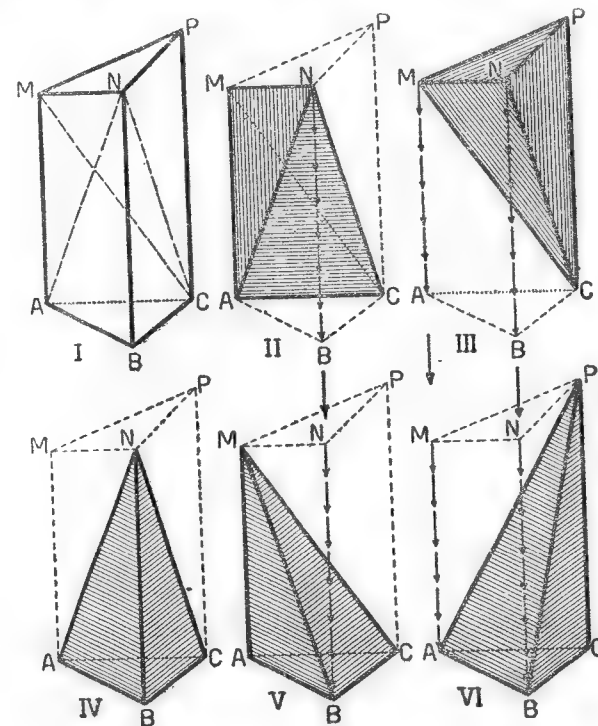


FIG. 77

O volume do tronco será:

$$V_T = V_{IV} + V_{II} + V_{III} \quad (1)$$

A pirâmide II é equivalente à pirâmide V, obtida com o deslocamento do vértice N ao longo de NB , como mostra a figura, por ser essa aresta paralela ao plano MAC (pag. 179).

A pirâmide III é eqüivalente à pirâmide VI, obtida com os deslocamentos dos vértices M e N ao longo de MA e NB , por razão análoga à anterior.

Substituindo, na igualdade (1), V_{II} , e V_{III} , respectivamente por V_V e V_{VI} , virá:

$$V_T = V_{IV} + V_V + V_{VI}$$

Na figura 76 vemos as três pirâmides reunidas.

b) Aplicações.

- 1.ª) O volume de um tronco de prisma triangular reto é igual ao produto da área da base pela média aritmética das arestas laterais.

$$\text{Tese: } V = B \times \frac{a_1 + a_2 + a_3}{3}$$

Realmente, o tronco (fig. 76) é a soma das três pirâmides, cujos volumes são:

$$\frac{Ba_1}{3}, \frac{Ba_2}{3} \text{ e } \frac{Ba_3}{3}$$

- 2.ª) Se o prisma é oblíquo a fórmula será:

$$V = B \times \frac{d_1 + d_2 + d_3}{3}$$

onde d_1 , d_2 e d_3 são as distâncias dos vértices ao plano da base, isto é, as alturas das três pirâmides triangulares.

EXERCÍCIOS

1. A aresta lateral de uma pirâmide regular mede 15 cm e a aresta da base, 18 cm. Calcular o apótema da pirâmide. *Resp.*: 12 cm. Preencha as lacunas nos exercícios abaixo, sendo:

a = apótema da pirâmide; a_1 = apótema da base; h = altura;
 a = aresta lateral e l = lado da base.

I) — Pirâmide quadrangular

	a	a_1	a_1	h	l
2.	5	3			
3.				10	6
4.			15		18

II) — Pirâmide triangular

- | | | | | | |
|----|-------|-------|-------|-------|-------|
| 5. | 13 | | | 12 | |
| 6. | | 2 | 5 | | |
- Calcular a área da secção feita numa pirâmide quadrangular regular por um plano paralelo à base. A distância da secção à base é igual a $1/3$ da altura e o perímetro da base tem 12 cm. *Resp.*: 4 cm².
 - Calcular a altura de uma pirâmide onde uma secção feita a 2 cm da base tem área equivalente a $1/4$ da área da base. *Resp.*: 4 cm.
 - A área da base de uma pirâmide hexagonal regular de 16 cm de altura é $108\sqrt{3}$ cm². Corta-se a pirâmide por um plano paralelo à base de modo que a área da secção é metade da área da base. Achar o lado da secção e a distância da secção ao vértice. *Resp.*: 6 cm e $8\sqrt{2}$ cm.
 - A área da base de uma pirâmide hexagonal regular tem 1 800 dm² e a altura, 3 m. Determinar o lado de uma secção paralela à base, feita a 12 dm do vértice. *Resp.*: $8\sqrt{3}$ dm.
 - O lado da base de uma pirâmide hexagonal regular tem 7 m e a altura, 35 m. Corta-se essa pirâmide por um plano paralelo à base aos $2/7$ da altura, a partir do vértice. Calcular o perímetro da secção e os segmentos que determina sobre uma aresta lateral. *Resp.*: 12 m, 10,1 m e 25,3 m.
 - A altura de uma pirâmide de base retangular mede 3 m. A diagonal da base tem 13 m e o perímetro 34 m. Calcular o volume da pirâmide. *Resp.*: 60 m³.
 - Calcular a área total de uma pirâmide hexagonal regular, cuja altura mede 3 m e o lado da base, 6 m. *Resp.*: 201,42 m². ($\sqrt{3} = 1,73$).
 - O apótema de uma pirâmide regular é igual ao semiperímetro da base, e esta é um quadrado inscrito num círculo de 8 m de raio. Calcular a área total. *Resp.*: 640 m².
 - O triedro V , do tetraedro $VABC$, é triângulo. O triângulo ABC é equilátero e tem 2 m de lado. Calcular o volume do tetraedro. *Resp.*: 0,471 m³.
 - O lado da base de uma pirâmide triangular regular mede 3 m. A área lateral é o quádruplo da área da base. Calcular o volume. *Resp.*: 4,356 m³.

17. O volume de uma pirâmide quadrangular regular mede $11,520 \text{ m}^3$, e a aresta da base, $2,4 \text{ m}$. Calcular a altura e o apótema da pirâmide. *Resp.*: 6 m e $6,1 \text{ m}$.
18. Calcular a área lateral e o volume de uma pirâmide hexagonal regular cuja aresta lateral tem 5 cm e a aresta da base, 4 cm . *Resp.*: $12\sqrt{21} \text{ cm}^2$ e $24\sqrt{3} \text{ cm}^3$.
19. Calcular a área total e o volume de uma pirâmide quadrangular regular, cujo apótema tem 5 cm e a aresta da base, 6 cm . *Resp.*: 96 cm^2 e 48 cm^3 .
20. Calcular, com erro menor que 1 cm^3 , o volume de uma pirâmide triangular regular, cujo apótema tem 15 cm e a altura, 12 cm . *Resp.*: $1\,684 \text{ cm}^3$.
21. Calcular a área total e o volume de uma pirâmide quadrangular regular, sendo conhecidas as medidas do apótema da pirâmide e da altura, respectivamente 10 cm e 8 cm . *Resp.*: 384 cm^2 e 384 cm^3 .
22. O apótema da base de uma pirâmide triangular regular mede 1 cm . A altura da pirâmide é igual ao semiperímetro da base. Calcular o volume. *Resp.*: 9 cm^3 .
23. Calcular, por logaritmos, o volume do tetraedro regular cuja aresta tem $1,45 \text{ cm}$. *Resp.*: $0,359 \text{ cm}^3$.
24. Calcular, por logaritmos, o volume do octaedro regular cuja aresta tem $4,5 \text{ m}$. *Resp.*: $42,95 \text{ m}^3$.
25. Calcular o volume do tetraedro cuja base é um triângulo equilátero de lado 4 cm e cujas arestas laterais medem 3 cm , 5 cm e 5 cm . *Resp.*: $6,928 \text{ cm}^3$.
26. O volume de uma pirâmide quadrangular regular é de 144 dm^3 e a altura é o dobro do lado da base. Calcular o lado de uma secção feita a 4 dm do vértice por um plano paralelo à base. *Resp.*: 2 dm .
27. A diagonal de um octaedro regular mede $4,242 \text{ m}$. Calcular o volume. ($\sqrt{2} = 1,414$). *Resp.*: $12,726 \text{ m}^3$.
28. Uma pirâmide regular tem por base um quadrado de lado x . A soma do apótema da pirâmide com o lado da base é igual a 5 cm e a superfície total da pirâmide é de 16 cm^2 . Calcular o volume. (E. Naval, 1946). *Resp.*: $3,771 \text{ cm}^3$.
29. Em uma pirâmide triangular $SABC$, o ângulo triedro S é trirretângulo. O triângulo ABC , da base, é equilátero de 22 cm de lado. Calcular o volume da pirâmide. (E. M., 1937). *Resp.*: $627,433 \text{ cm}^3$.
30. Se num tetraedro $SABC$ o triedro S for trirretângulo, o volume será um sexto do produto das arestas que concorrem no vértice S . Provar.

31. Calcular a altura e o volume do tetraedro regular, cuja aresta é igual ao perímetro de um triângulo equilátero circunscrito a um círculo de 8 m de raio. (E. N. Engenharia, 1936). *Resp.*: $67,68 \text{ m}$ e $67\,737,600 \text{ m}^3$.
32. Uma pirâmide de base triangular, cujos lados medem, respectivamente, 15 , 12 e 9 cm , tem altura de 12 cm . Corta-se essa pirâmide por um plano paralelo à base distante 8 cm do vértice. Calcular o volume da pirâmide e o do tronco resultante. (E. Técnica do Exército, 1948). *Resp.*: 64 cm^3 e 152 cm^3 .
33. Calcular a área lateral de um tronco de pirâmide quadrangular regular de bases paralelas, em que os perímetros das bases têm 32 cm e 56 cm e a altura do tronco, 4 cm . *Resp.*: 220 cm^2 .
34. Calcular a área lateral de um tronco de pirâmide triangular regular, cujos lados das bases medem respectivamente 2 cm e 8 cm e cuja aresta lateral tem 5 cm . *Resp.*: 60 cm^2 .
35. Corta-se uma pirâmide triangular regular por um plano paralelo à base que intersecta o eixo a uma distância do vértice igual a $1/3$ da altura. O raio do círculo circunscrito à base da pirâmide tendo 18 dm e a altura 12 dm , calcular a área lateral do tronco obtido. *Resp.*: $623,52 \text{ dm}^2$.
36. Um tetraedro, cujos lados da base medem 6 m , 8 m e 10 m tem arestas laterais de 13 metros cada uma. Calcular a altura desse poliedro em relação à base considerada. (E. Técnica do Exército, 1946). *Resp.*: 12 m .
37. A que distância do vértice se deve passar uma secção paralela à base de uma pirâmide para dividi-la em duas partes equivalentes?
(E. Técnica do Exército, 1945). *Resp.*: $\frac{1}{2} h \sqrt[3]{4}$.
38. Calcular o volume do poliedro regular obtido no exercício 45 do capítulo anterior em função do raio do círculo circunscrito à base do prisma. (E. Técnica do Exército, 1948). *Resp.*: $R^3 \sqrt{6}$.
39. Uma pirâmide regular tem as arestas iguais. Sendo a base um quadrado de 4 cm de diagonal, pede-se a área total e o volume. (Univ. do Paraná, Fac. de Fil., fevereiro, 1951). *Resp.*: $21,86 \text{ cm}^2$ e $5,333 \text{ cm}^3$.
40. Demonstrar que em toda pirâmide triangular, os planos tirados pelo vértice, ortogonais às arestas da base passam por uma mesma reta. (Fac. de Filosofia, São Paulo, 1951, E. Polit. da Univ. de São Paulo, 1947).
41. A base de uma pirâmide quadrangular regular tem 225 cm^2 de área. Uma secção paralela à base, feita a 4 cm do vértice, tem 25 cm^2 de área.
I - Calcular a altura da pirâmide total.
II - Calcular a área lateral da pirâmide total.

- III - Calcular a área lateral do tronco de pirâmide formado pela base e pela secção (E. Militar de Porto Alegre). *Resp.*: 12 cm: 424,50 cm² e 376 cm².
43. Considera-se uma pirâmide regular de base quadrangular; sua altura é igual à diagonal do quadrado da base, e seu volume vale 2 m³. Calcular o lado da base e a altura. (Fac. de Fil. da U. Minas Gerais. 1.º concurso, 1951). *Resp.*: $\sqrt[6]{18}$ e $\sqrt[3]{12}$.
44. Dá-se a diagonal $d = 0,25$ m da base quadrada de uma pirâmide regular de altura $h = 0,42$ m e pede-se calcular seu volume. (E. Eng. Juiz de Fora) *Resp.*: 0,004375 m³.
45. Achar a razão entre o volume do cubo de aresta a e o do tetraedro regular cuja aresta seja a diagonal de uma das faces do cubo. (Escola de Arq. da U. Minas Gerais, 1953). *Resp.*: 3.
46. Em um tetraedro regular $SABC$ provar que as arestas opostas SA e BC são retangulares. (E. Militar, 1932)
47. Corta-se um tetraedro regular por um plano P , paralelo a duas arestas opostas. Demonstrar que a secção é um retângulo. Calcular a área da secção quando o plano P for equidistante das duas arestas opostas consideradas. Aplicar para um tetraedro de aresta igual a 10 m. E. Técnica do Exército, 1948). *Resp.*: A secção equidistante é um quadrado, $S = 25$ m².
48. Pela diagonal de uma das faces de um cubo de aresta 12 m, faz-se passar um plano que forma com esta face um diedro de 30°. Calcular os volumes dos sólidos em que fica decomposto o cubo. (E. E. da U. Minas Gerais, 1944). *Resp.*: 117,552 m³ e 1610,448 m³.
49. É dado um cubo de 8 cm³ de volume. Calcular o volume do tetraedro regular, cuja área total seja igual a área total do cubo. (E. P. da Univ. Católica, Rio de Janeiro, 1948). *Resp.*: $\frac{8}{3} \sqrt[3]{27}$
50. Em uma pirâmide, a aresta lateral SA mede 8 cm. A que distância do vértice S devemos tomar o ponto M , sobre SA , a fim de que o plano paralelo à base, tirado por M , destaque uma pirâmide parcial, cujo volume esteja para o volume da total como 4 está para 9? (E. Aeronáutica, 1952). *Resp.*: $8/3 \sqrt[3]{12}$ cm.
51. Uma pirâmide de base quadrada tem, de volume, 360 dm³. Pede-se a altura, sabendo que é igual a $5/4$ da diagonal da base. (E. Fluminense de Engenharia, 1953). *Resp.*: 15 dm.
52. Calcular a diagonal de um cubo, cuja área total seja igual à área total de um tetraedro regular de 3 m de aresta. (Fil. U. D. F., 1945).
Resp.: $\frac{3}{2} \sqrt[3]{12}$ m.

53. A que distância, a partir da base, se deve cortar uma pirâmide de 6 m de altura, a fim de dividi-la em dois sólidos de volumes iguais? (Fil. U. D. F., 1946). *Resp.*: $(6 - 3 \cdot \sqrt[3]{4})$ m.

Questões de Concurso em 1958:

54. Um tronco de prisma triangular reto é equivalente ao prisma ---- (E. N. E.).
55. Uma pirâmide triangular regular tem o apótema da base medindo 3 m. O apótema da pirâmide mede 5 m. Calcule o volume dessa pirâmide. (E. Flu. E.). *Resp.*: $36 \sqrt{3}$ m².
56. Uma pirâmide é regular quando ----- (E. P. U. C.).
57. Corta-se uma pirâmide de 12 cm de altura por um plano paralelo à base e a 4 cm da base. Calcule a razão entre a área da base e a área da secção. (E. P. U. C. — Rio).
Resp.: $\frac{9}{4}$.

Questões de Concurso em 1959, 1960 e 1961:

58. Uma pirâmide triangular regular tem o perímetro da base igual a 6m. Calcule a altura da pirâmide para que ela seja um tetraedro regular. (E. Flu. E. — 1958). *Resp.*: $2 \sqrt{6/3}$ m.
59. Uma pirâmide quadrangular regular tem as arestas laterais iguais às arestas da base. Calcule o ângulo de cada aresta lateral com o plano da base. (E.P.U.C. — 1959). *Resp.*: 45°.
60. O apótema de uma pirâmide regular é o dobro do apótema da base. Calcule a medida do diedro formado pelas faces laterais com a base. (E.P.U.C. — 1960). *Resp.*: 60°.
61. Calcule o volume da pirâmide que tem por base uma das faces de um cubo de 5cm de aresta e por vértice um ponto do segmento de reta que liga os centros de duas faces opostas e perpendiculares a essa base. (Eng. U. Rio de Janeiro — 1961). *Resp.*: 20,833cm³.
62. Uma pirâmide quadrangular regular tem de volume 64m³ e o lado da base igual a 8m. Calcule a distância do centro da base a uma das faces laterais. (E.U. Rio — 1961). *Resp.*: 2,4m.
63. Um triedro triretângulo é cortado por um plano que intercepta as três arestas formando um triângulo de lados 8cm, 10cm e 12 cm, respectivamente. Calcule o volume do sólido formado. (E.U. Rio — 1961). *Resp.*: $15 \sqrt{6}$ cm³.
64. O perímetro da base ABCD de uma pirâmide quadrangular regular de vértice M é igual a 24m e a altura mede 4m. Calcule a distância do vértice B à face oposta ADM. (E.F.E. — 1960). *Resp.*: 4,8m.

65. Um tronco de pirâmide hexagonal regular tem o apótema medindo 18cm e o perímetro da base maior igual ao triplo do perímetro da base menor. Calcule a altura do tronco sabendo que a base menor tem $54\sqrt{3}\text{cm}^2$ de área. (E.F.E. — 1959). *Resp.*: $6\sqrt{6}\text{cm}$.
66. O perímetro da base e a altura de uma pirâmide quadrangular regular medem, respectivamente, $32\sqrt{2}\text{cm}$ e 6cm.

Do centro da base traça-se a perpendicular a uma das arestas e do pé dessa perpendicular traça-se um plano paralelo à base da pirâmide. Calcule o volume do tronco de pirâmide assim determinado. (E.F.E. — 1959). *Resp.*: $244,060\text{cm}^3$

67. Um tronco de pirâmide quadrangular regular tem os perímetros das bases medindo $20\sqrt{2}\text{m}$ e $44\sqrt{2}\text{m}$. As arestas laterais do tronco são iguais às diagonais da base menor. Calcule o volume do tronco. (E.P.U.C. — 1959). *Resp.*: 1072m^3 .

68. Dada a seção reta ABC de um prisma triangular, traça-se por C um plano que corta o prisma segundo um triângulo equilátero CDE. Calcule o volume da pirâmide de vértice C e de base ABDE, sendo conhecidos:

$$BC = a, AB = 2a \text{ e } AC = 2a. \text{ (E.N.E. — 1957). } \textit{Resp.}: \frac{a^3 \sqrt{15}}{4}$$

CAPÍTULO V

SUPERFÍCIES

(Curso Científico)

1. Linha. A linha pode ser definida como o lugar geométrico das posições de um ponto móvel.

Se todas as posições do ponto móvel estão no mesmo plano, obteremos uma **linha plana** (p, fig. 78).

Em caso contrário diz-se **reversa** ou de **dupla curvatura** (r, fig. 78).

2. Superfície. A superfície pode ser definida como o lugar geométrico das posições sucessivas de uma linha que se desloca segundo uma lei determinada.

A linha móvel denomina-se **geratriz** (G G', fig. 79) da superfície.

Como caso excepcional, devemos excluir o deslocamento em que a geratriz, em todas as posições, coincide com ela própria, como acontece com a rotação da circunferência em torno do centro, e a translação da reta sobre si mesma. A linha, nestes casos, não gera superfícies.

Geralmente o deslocamento da geratriz é subordinado à condição de apoiar-se sobre uma ou mais linhas fixas, planas

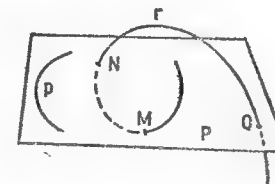


FIG. 78

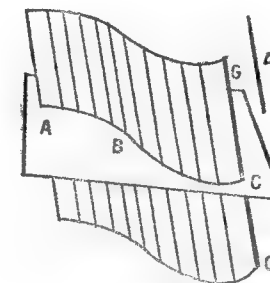


FIG. 79

ou reversas, denominadas **diretrizes**, porque dirigem o movimento da linha geradora da superfície. Em certos casos, em lugar de linhas diretrizes consideram-se superfícies **diretoras** (Q, fig. 82).

3. Família de superfícies. As superfícies que têm a *mesma geratriz* e a *mesma lei de geração* constituem uma **família de superfícies**.

Se considerarmos, por exemplo, as superfícies geradas por uma linha reta (geratriz, fig. 79) que se desloca conservando-se paralela a uma direção Δ (lei de geração), temos a **família de superfícies cilíndricas**.

As superfícies da mesma família distinguem-se uma das outras pela diretriz. Assim, pertencem à família das superfícies cilíndricas, o plano (diretriz retilínea), a superfície cilíndrica circular (a diretriz é uma circunferência), superfície cilíndrica parabólica (a diretriz é uma parábola), etc.

4. Classificação das superfícies. As superfícies dividem-se em dois grupos, segundo a *natureza da geratriz*:

- 1.º) **Retilíneas**, quando a geratriz é uma *linha reta*;
- 2.º) **curvilíneas**, quando a geratriz é uma *linha curva* e, de nenhum modo, podem admitir geratriz retilínea.

As superfícies retilíneas subdividem-se, ainda, em dois grupos: *desenvolvíveis* e *reversas*.

A superfície retilínea é **desenvolvível** quando se pode estender em um plano sem dobra e sem se romper, isto é, aquelas em que cada duas geratrizes consecutivas estão situadas no mesmo plano (figs. 79 e 80).

A superfície retilínea é **reversa** em caso contrário, isto é, quando duas geratrizes consecutivas não estão no mesmo plano (figs. 81, 82 e 83).

5. Superfícies retilíneas. As principais famílias de superfícies retilíneas são:

a) **Superfície cilíndrica** (fig. 79), é a superfície gerada por uma reta GG' (geratriz) que se desloca apoiando-se constantemente numa linha fixa (diretriz) e mantendo-se paralela a uma direção Δ .

A superfície cilíndrica é desenvolvível.

b) **Superfície cônica** (fig. 80), é a superfície gerada por uma reta que, mantendo um ponto fixo, apoia-se sobre uma linha dada. O ponto fixo V denomina-se **VÉRTICE** (fig. 80), e a linha dada ABC , **DIRETRIZ**.

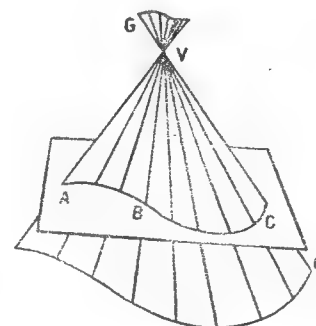


FIG. 80

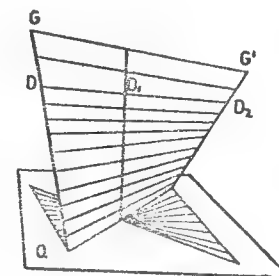


FIG. 81

A superfície cônica compõe-se de duas folhas separadas pelo vértice V .

As diversas superfícies da família das cônicas distinguem-se pela diretriz. Se a diretriz é uma reta, a cônica é um plano; se a diretriz é um círculo, obtém-se a superfície cônica circular, etc.

A superfície cônica é desenvolvível.

c) **Hiperbolóide de uma folha.** É a superfície gerada por uma reta que se desloca apoiando-se em três diretrizes retilíneas não coplanares (fig. 81).

d) **Superfícies conóides.** São superfícies geradas por uma reta que encontra sempre uma outra reta fixa e desliza sobre uma linha qualquer (fig. 82) mantendo-se paralela a um plano fixo Q (plano diretor).

No caso particular em que as duas diretrizes são retilíneas e não complanares obtém-se o parabolóide hiperbólico (fig. 83), que é da família dos conóides.

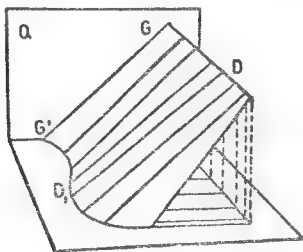


FIG. 82

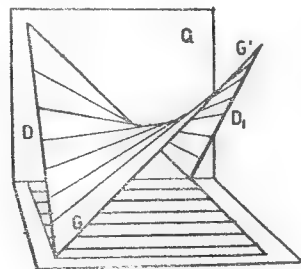


FIG. 83

6. Superfícies de revolução.

Chama-se *superfície de revolução* a superfície gerada por uma linha plana que faz uma rotação completa em torno de um eixo fixo de seu plano (fig. 84 a 89).

Nesta rotação, qualquer ponto A da geratriz ABC gera uma circunferência, cujo plano é perpendicular ao eixo XY e cujo centro pertence ao eixo. Daí resulta que toda secção perpendicular ao eixo é um círculo.

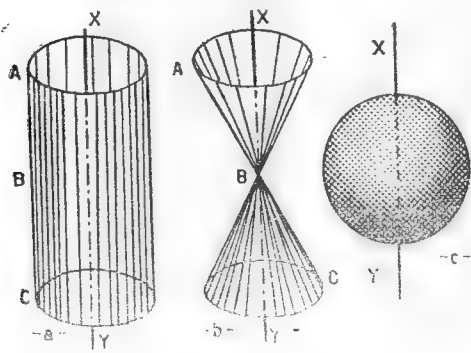


FIG. 84

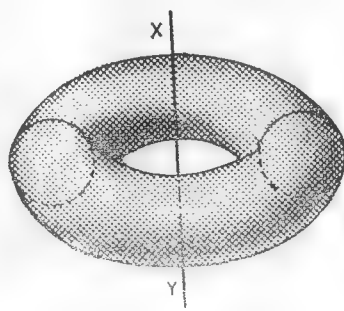


FIG. 85

Estes círculos denominam-se **PARALELOS** da superfície de revolução.

Círculo de gola é o paralelo de menor raio.

Equador é o paralelo de maior raio.

Meridiano é a secção determinada na superfície de revolução por um plano que contém o eixo. O meridiano é uma linha ou um par de linhas simétricas em relação ao eixo.

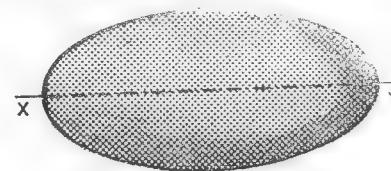


FIG. 86

7. Exemplos de superfícies de revolução.

- 1.º Se a geratriz é uma reta paralela ao eixo, obtém-se a **superfície cilíndrica de revolução** (fig. 84, a).
- 2.º Se a geratriz é uma reta que corta o eixo, obtém-se a **superfície cônica de revolução**. (fig. 84, b).

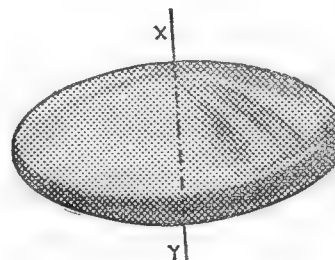


FIG. 87

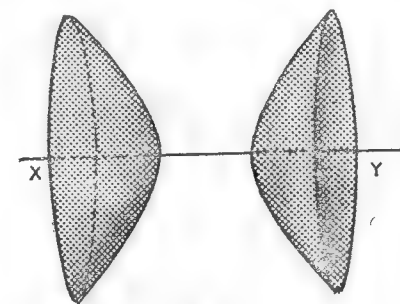


FIG. 88

- 3.º Se a geratriz é uma semi-circunferência cujo diâmetro é o eixo, obtém-se a **superfície esférica**, que é sempre de revolução (fig. 84, c.)

4.º Se a geratriz é uma circunferência, cujo centro não pertence ao eixo, obtém-se o **toro** (fig. 85).

5.º Se a geratriz é uma elipse que gira em torno do eixo maior, obtém-se o **elipsóide de revolução alongado** (fig. 86).

6.º Se a geratriz é uma elipse que gira em torno do eixo menor, obtém-se o **elipsóide de revolução achatado** (fig. 87).

7.º Se a geratriz é uma hipérbole que gira em torno do eixo transversal (fig. 88), obtém-se o **hiperbolóide de revolução de duas folhas**.

8.º A parábola, girando em torno do eixo, gera o **parabolóide de revolução** (fig. 89).

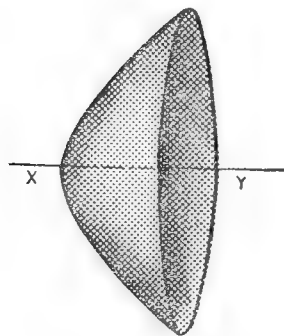


FIG. 89

OBSERVAÇÃO. É importante observar que toda superfície de revolução é, necessariamente retilínea ou curvilínea, isto é, pertence a um dos dois grupos gerais de superfícies.

RESUMO DA CLASSIFICAÇÃO

NATUREZA DA GERATRIZ	RETILÍNEAS..	{	Desenvolvíveis...	{	Cilíndricas Cônicas
	CURVILÍNEAS	{	Reversas.....	{	De 3 diretrizes: Hiperbolóide de uma folha De plano diretor: Conóide
					Esfera Elipsóide Hiperbolóide de 2 folhas etc.

CAPÍTULO VI

CILINDRO

1. Definições.

1.º **Cilindro** é o corpo limitado por uma superfície cilíndrica fechada e duas secções planas paralelas que cortam todas as geratrizes.

As secções planas denominam-se **bases**. A distância entre as bases é a **altura** OO' (fig. 90).

2.º No caso particular da superfície cilíndrica ser circular o cilindro obtido denomina-se **cilindro circular**.

3.º **Cilindro de revolução** é o corpo engendrado pela rotação de um retângulo $AA' OO'$ em torno de um de seus lados (fig. 91).

O lado que serve de eixo de rotação será o **eixo** e **altura** do cilindro, o lado oposto será a **geratriz** e o lado contíguo, o **raio** da base (fig. 91).

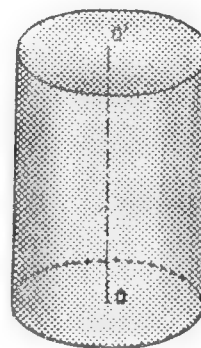


FIG. 90

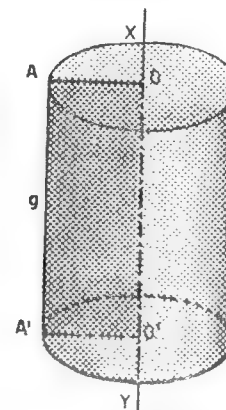


FIG. 91

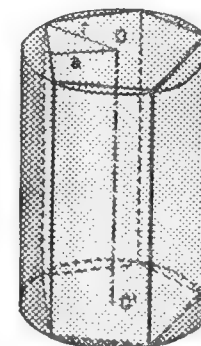


FIG. 92

O cilindro de revolução pode também ser definido como o corpo limitado por uma superfície cilíndrica de revolução e dois planos perpendiculares ao eixo dessa superfície.

4.ª) O cilindro circular pode, ainda, ser considerado o limite de um prisma inscrito, cujo número de lados da base cresce indefinidamente (fig. 92).

2. Propriedades do cilindro circular. De acordo com a quarta definição o cilindro é o limite de um prisma, logo gozará de todas as propriedades do prisma.

3. Área lateral, total e volume. Representemos por S_l , S_t e V a área lateral, a total e o volume de um cilindro C e por S'_l , S'_t e V' a área lateral, a total e o volume de um prisma P de base regular, inscrito no mesmo cilindro (fig. 92), teremos

$$S'_l = 2ph$$

$$S'_t = 2p(h + a)$$

$$V' = Bh$$

Se o número de arestas na base do prisma crescer indefinidamente, o perímetro $2p$ será a circunferência $2\pi r$ da base, o apótema a da base tem para limite o raio r e a área da base tem para limite πr^2 . A altura h é constante.

Assim, para o cilindro tem-se:

$$S_l = 2\pi r h$$

$$S_t = 2\pi r (h + r)$$

$$V = \pi r^2 h$$

OBSERVAÇÃO. A área lateral do cilindro circular oblíquo obtém-se, de modo análogo a do prisma oblíquo, multiplicando o perímetro da secção reta pela geratriz.

4. Secção meridiana. *Secção meridiana* é a secção plana que contém o eixo do cilindro de revolução. Esta secção é um retângulo equivalente ao dobro do retângulo gerador (fig. 93, $AA'B'B$).

5. Cilindro equilátero é o cilindro de revolução, cuja secção meridiana é um quadrado.

No cilindro equilátero têm-se:

$$g = h = 2r$$

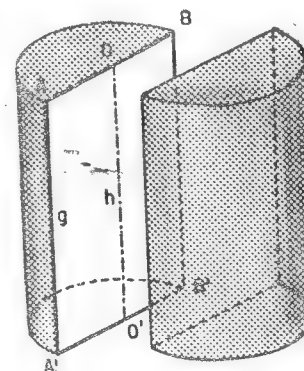


FIG. 93

Assim, se substituirmos h por $2r$ nas fórmulas do cilindro, obteremos fórmulas particulares do cilindro equilátero em função apenas de r , que serão:

$$S_l = 4\pi r^2$$

$$S_t = 6\pi r^2$$

$$V = 2\pi r^3$$

6. Semi-cilindro. *Semi-cilindro* é o corpo obtido cortando-se um cilindro segundo uma secção meridiana (fig. 93).

Observemos que o volume do semi-cilindro é a metade do volume do cilindro correspondente.

A área total é, no entanto, a metade da área total do cilindro originário, acrescida da área da secção meridiana $AA'B'B$, isto é, de $2rh$. Temos, dêsse modo:

$$S_t = \pi r(h + r) + 2rh.$$

7. Cilindros semelhantes. Dois cilindros de revolução dizem-se *semelhantes* quando são gerados por dois retângulos semelhantes, isto é, quando as alturas estão entre si como os raios das bases.

8. Relações entre as áreas e os volumes dos cilindros semelhantes.

1.ª)

As áreas laterais ou totais de dois cilindros semelhantes estão entre si como os quadrados dos raios ou das alturas.

Sejam r e r' os raios das bases; h e h' , as alturas.
Teremos, por definição:

$$\frac{r}{r'} = \frac{h}{h'} = \frac{r+h}{r'+h'} \quad (1)$$

Por consequência, vem:

$$\frac{S_l}{S'_l} = \frac{2\pi rh}{2\pi r'h'} = \frac{r}{r'} \times \frac{h}{h'} = \frac{h^2}{h'^2} = \frac{r^2}{r'^2}$$

$$e. \frac{S_t}{S'_t} = \frac{2\pi r(h+r)}{2\pi r'(h'+r')} = \frac{r}{r'} \times \frac{h+r}{h'+r'} = \frac{r^2}{r'^2} = \frac{h^2}{h'^2}$$

2.ª)

Os volumes de dois cilindros semelhantes estão entre si como os cubos dos raios ou das alturas.

Temos:
$$\frac{V}{V'} = \frac{\pi r^2 h}{\pi r'^2 h'} = \frac{r^2}{r'^2} \times \frac{h}{h'} = \frac{r^3}{r'^3} = \frac{h^3}{h'^3}$$

9. Tronco de cilindro.

a) **Definição.** Tronco de cilindro é o corpo obtido seccionando-se o cilindro segundo um plano não paralelo à base (fig. 94) que corte todas as geratrizes.

b) **Volume do tronco.**

O volume de um tronco de cilindro de revolução é igual ao produto da área do círculo da base pelo eixo.

Tese: $V = \pi r^2 e$.

Demonstração.

Seja o tronco $A'B'CD$ (fig. 94), r o raio do círculo da base e e o eixo OO' .

Prolonguemos o eixo OO' até O'' , de modo que $OO'' = 2 \times OO'$.

Prolonguemos, ainda, as geratrizes e tracemos pelo ponto O'' um plano paralelo à base. Fica assim formado o cilindro $ABA'B'$ que tem a mesma base do tronco e cuja altura é o dobro do eixo do tronco.

O volume V' desse cilindro será

$$V' = \pi r^2 \cdot 2e \quad (1)$$

Por outro lado, o tronco de cilindro é equivalente à metade do cilindro obtido. Realmente, traçando pelo ponto O' uma paralela a AB ficam formados dois triângulos retângulos $CO'M$ e $DO'N$ que têm os ângulos em O' iguais como opostos pelo vértice e $O'M$ igual a $O'N$, como raios do mesmo círculo.

Assim, se fizermos rotação em torno do diâmetro perpendicular a MN , o ponto M coincidirá com N e da mesma forma C com D .

Raciocínio análogo pode ser aplicado aos demais pontos da secção CD e, portanto, o sólido $CO'M$ coincide com $DO'N$.

Conclui-se, assim, a equivalência entre o tronco e a metade do cilindro e, portanto, o volume V do tronco será

$$V = \frac{V'}{2}$$

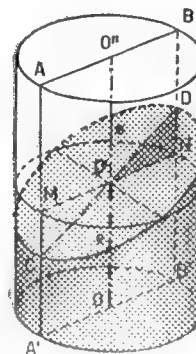


FIG. 94

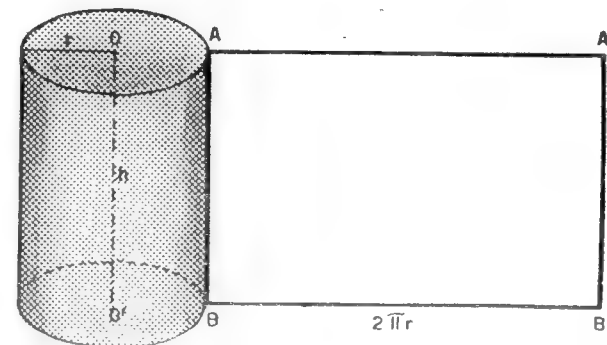


FIG. 95

ou, de acôrdo com (1):

$$V = \pi r^2 e$$

OBSERVAÇÃO. De modo análogo demonstraremos que a área lateral do tronco de cilindro de revolução é igual ao produto da circunferência da base pelo eixo, isto é:

$$S = 2\pi r e$$

10. Desenvolvimento da superfície lateral. O desenvolvimento da superfície lateral de um cilindro de revolução é um retângulo, (fig. 95), cuja base é a circunferência retificada ($2\pi r$) e cuja altura é a altura h do cilindro.

EXERCÍCIOS

OBSERVAÇÃO. O número π foi considerado com o valor aproximado 3,14.

- Um cilindro de revolução tem 3 m de altura e o círculo da base tem o raio de 0,1 m. Calcular as áreas lateral e total. *Resp.: 1,88 m² e 1,95 m².*
- Calcular o raio da base de um cilindro de revolução, cuja altura tem 1 m e a área lateral, 18,84 m². *Resp.: 3 m.*
- A área total de um cilindro de revolução tem 4,3332 m² e o raio da base, 0,3 m. Calcular a altura. *Resp.: 2 m.*
- O volume de um cilindro equilátero tem 16π m³. Calcular o raio e a altura. *Resp.: 2 m e 4 m.*
- Calcular o raio e a altura de um cilindro de revolução, cuja área lateral tem 70 m² e o volume, 35 m³. *Resp.: 1 m e 11,1 m.*
- A área de secção meridiana de um cilindro equilátero tem 36 m². Calcular o volume. *Resp.: 169,56 cm³.*
- A área lateral de um cilindro equilátero mede 16π cm². Calcular o raio. *Resp.: 2 cm.*
- Calcular a área total e o volume de um cilindro equilátero, cuja área da secção meridiana vale 64 dm². *Resp.: 301,44 dm² e 401,92 dm³.*
- A área lateral de um cilindro de revolução é igual à área da base. Calcular o volume, sabendo que a altura tem 5 dm. *Resp.: 1570 dm³.*

- Calcular o volume de um cilindro de revolução, cuja área lateral é igual à área da base e no qual a área da secção meridiana mede 4 cm². *Resp.: 12,564 cm³.*
- O raio da base de um cilindro de revolução mede 2 cm e a secção meridiana é equivalente à base. Calcular a área total. *Resp.: 64,56 cm².*

Preencha as lacunas com os valores dos elementos dos seguintes cilindros de revolução:

	r	h	S_l	S_t	V
12.			60π	78π	
13.			192π		768π
14.		4			88 (Cálculo por logaritmos)
15.		5		48π	
16. r	r				

- Um retângulo de 4 m de largura e 5 m de comprimento gira em torno do lado maior. Calcular a área lateral e o volume do sólido gerado. *Resp.: 40π m² e 80π m³.*
- Um retângulo, girando em torno de cada um dos lados diferentes gera dois sólidos. Os volumes desses sólidos medem respectivamente 360π m³ e 600π m³. Calcular a base e a altura do retângulo. *Resp.: 6 m e 10 m.*
- Achar a área da superfície lateral de um tanque de gasolina de forma cilíndrica com capacidade de 48 000 litros, e cujo diâmetro tem 10 m. *Resp.: 19,2 m².*
- Os volumes dos dois sólidos gerados pela revolução de um retângulo em torno dos lados desiguais são inversamente proporcionais aos comprimentos dos lados que servem de eixo. Provar.
- O volume de um cilindro de revolução é igual ao produto da área lateral pela metade do raio da base. Provar.
- Calcular o volume de um cilindro de revolução de raio igual a 5 dm, sabendo-se que esse cilindro, cortado por um plano paralelo ao eixo e a uma distância de 3 dm desse eixo, apresenta uma secção retangular equivalente à base. (Fac. Nacional de Arquitetura, 1946) *Resp.: 771 dm³.*
- Calcular o diâmetro de uma barra metálica de forma cilíndrica de 5 m de comprimento e 313 kg de peso, sabendo que o dm³ do metal pesa 500 g. (Cálculo por logaritmo). *Resp.: 0,4 m.*
- Calcular o volume de um cilindro inscrito em um prisma hexagonal regular. A área da base do prisma é representada, em dm², pelo número $6\sqrt{3}$ e a altura tem comprimento igual ao semiperímetro da base. *Resp.: 18π dm³.*
- O quadrado circunscrito à base de um cilindro de revolução tem 36 m² de área. A altura vale $\frac{5}{3}$ do diâmetro da base. Calcular a área lateral e o volume. *Resp.: 188,40 m² e 282,600 m³.*

26. Calcular as áreas lateral e total de um cilindro de revolução, cuja diagonal do retângulo gerador mede 10 m e o raio da base, 8 m.
Resp.: $301,44 \text{ m}^2$ e $703,36 \text{ m}^2$.
27. Calcular as dimensões do retângulo gerador de um cilindro de revolução, cuja área lateral tem $37,68 \text{ m}^2$ e o volume, $37,68 \text{ m}^3$.
Resp.: 2 m e 3 m.
28. Um retângulo, cujo lado maior mede 2,5 m, gira em torno desse lado. O lado menor gera um círculo, cuja circunferência tem 9,42 m de comprimento. Calcular a área lateral e a total do cilindro gerado. *Resp.*: $23,5 \text{ m}^2$ e $37,68 \text{ m}^2$.
Resp.: $23,55 \text{ m}^2$ e $37,68 \text{ m}^2$.
29. Calcular o volume do cilindro circunscrito a um cubo de 512 dm^3 de volume. *Resp.*: $256\pi \text{ dm}^3$.
30. Calcular a área total de um cilindro de revolução em que cada uma das bases tem $12,56 \text{ m}^2$ de área e a altura, 5 m. *Resp.*: $87,92 \text{ m}^2$.
31. Calcular a altura de um cilindro de revolução, cuja área total mede $251,2 \text{ m}^2$ e o comprimento da circunferência de uma das bases, 31,4 m. *Resp.*: 3 m.
32. O raio da base de um cilindro é igual ao lado do triângulo equilátero inscrito num círculo de raio $R = \sqrt{3}$ e sua altura é igual ao lado do quadrado inscrito no mesmo círculo. Calcular o volume. (Fac. U. D. F., 1946) *Resp.*: $9\pi \sqrt{6}$.
33. No círculo de raio $r = 4 \text{ m}$, traçam-se duas cordas paralelas, iguais respectivamente aos lados do hexágono e do triângulo, regulares, inscritos no referido círculo. Determinar o volume da porção do cilindro de altura $h = 6 \text{ m}$ que tem para base a porção de círculo compreendida entre as mencionadas cordas, supondo o centro do círculo não situado entre as duas cordas. (E. N. de Engenharia, 1952). *Resp.*: $16\pi \text{ m}^3$.
34. Calcular a superfície lateral de um cilindro sabendo que o volume é 12π e a diagonal da secção por um plano que contém o eixo é 5. (Fac. Fil. de São Bento — São Paulo, 1949). *Resp.*: 12π .
35. Calcular o volume V de um octaedro regular inscrito em um cilindro equilátero de raio R . (Escola Técnica do Exército, 1950).
Resp.: $\frac{4}{3} R^3$.

Questões de Concurso em 1953:

36. A diagonal do retângulo gerador de um cilindro de revolução mede 6 m e forma com um dos lados, que é o eixo do cilindro, um ângulo de 30° . Calcule o volume do cilindro. (E. N. E.).
Resp.: $27\pi \sqrt{3} \text{ m}^3$.

CAPÍTULO VII

CONE

1. Definições.

1.ª) **Cone** é o corpo limitado por uma fôlha de superfície cônica fechada e uma secção plana que intercepta tôdas as geratrizes (fig. 96).

A secção plana denomina-se **BASE**.

2.ª) **Tronco de cone de bases paralelas** é o corpo limitado pela superfície cônica fechada e duas secções planas paralelas que interceptam tôdas as geratrizes sem conter o vértice (fig. 97). O tronco de cone diz-se de **PRIMEIRA ESPÉCIE** quando as duas secções planas que o limitam ficam do mesmo lado do vértice (A, fig. 97). O tronco diz-se de **SEGUNDA ESPÉCIE** quando o vértice fica compreendido entre as duas secções planas (B, fig. 97).

3.ª) **Cone circular** é o que tem para base um círculo.

No cone circular o segmento determinado pelo vértice e pelo centro da base chama-se **EIXO**. O cone circular é **RETO** (fig. 96-A), quando o eixo é perpendicular ao plano da base. É **obliquo** (fig. 96-B), em caso contrário.

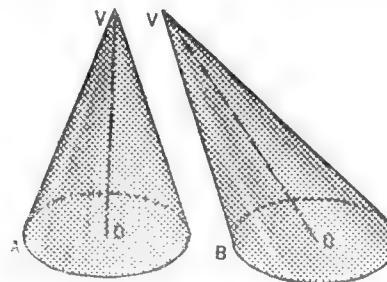


FIG. 96

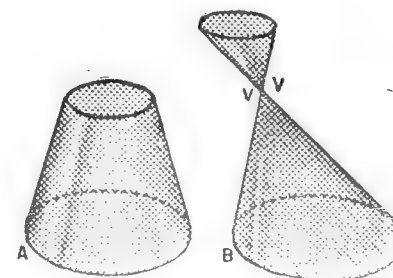


FIG. 97

4.ª) **Cone de revolução** é o gerado pela rotação completa de um triângulo retângulo em torno de um dos catetos (fig. 98).

O cateto que serve de eixo é a altura, o outro cateto é o raio da base e a hipotenusa é a geratriz da superfície lateral. Daí a relação, em virtude do teorema de Pitágoras:

$$g^2 = h^2 + r^2$$

OBSERVAÇÃO. O cone de revolução pode também ser definido como o corpo limitado por uma fôlha de superfície cônica de revolução e uma secção plana perpendicular ao eixo.

5.ª) O cone circular pode, ainda, ser considerado, como o limite para o qual tende uma pirâmide inscrita quando o número de lados da base cresce indefinidamente (fig. 99). Dizendo-se **inscrita** a pirâmide cujo vértice coincide com o do cone e cuja base é um polígono inscrito no círculo da base do cone.

2. **Propriedades do cone.** Em virtude da quinta definição todas as propriedades da pirâmide são extensivas ao cone circular. Assim, podemos concluir:

- 1.ª) O plano paralelo à base de um cone divide as geratrizes e a altura em partes proporcionais (fig. 100).
- 2.ª) A secção paralela à base é um círculo e a área da secção está para a área da base como os quadrados de suas distâncias ao vértice.

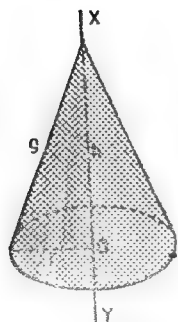


FIG. 98

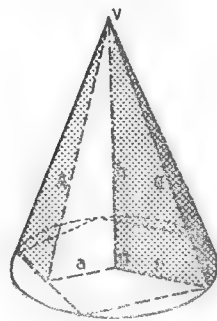


FIG. 99

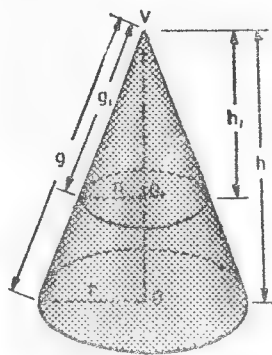


FIG. 100

3. **Área lateral, área total e volume do cone.** Representando por S , S_t e V respectivamente, a área lateral, a total e o volume de um cone e por S' , S'_t e V' os elementos correspondentes da pirâmide regular inscrita com n arestas na base, podemos concluir:

$$S' = pa$$

$$S'_t = p(a + a_1)$$

$$V' = \frac{Bh}{3}$$

Quando n cresce, p tende para πr , a tende para a geratriz, a_1 tende para r , B tende para πr^2 e a altura h é constante.

Assim, para o cone, teremos as fórmulas:

$$S_t = \pi r g$$

$$S_t = \pi r(g + r)$$

$$V = \frac{\pi r^2 h}{3}$$

4. **Cone equilátero.** Cone equilátero é o cone de revolução, cuja secção meridiana é um triângulo equilátero (fig. 101).

No cone equilátero têm-se, por ser AVB um triângulo equilátero:

$$g = 2r \quad \text{e} \quad h = \frac{g\sqrt{3}}{2} = r\sqrt{3}.$$

Assim, se substituirmos g por $2r$ e h por $r\sqrt{3}$, obteremos as fórmulas particulares do cone equilátero:

$$S_t = 2\pi r^2$$

$$S_t = 3\pi r^2$$

$$V = \frac{\pi r^3 \sqrt{3}}{3}$$

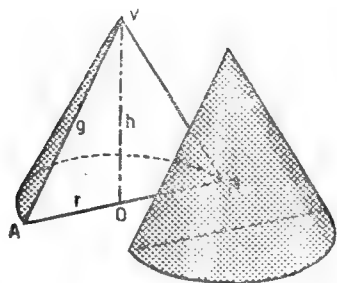


FIG. 101

5. Cones semelhantes. Dois cones de revolução dizem-se semelhantes (fig. 100) quando são gerados por dois triângulos semelhantes, isto é, quando satisfazem as relações:

$$\frac{g}{g_1} = \frac{r}{r_1} = \frac{h}{h_1} \quad (1)$$

OBSERVAÇÃO. De acordo com a definição, a seção plana paralela à base de um cone de revolução, determina um cone parcial semelhante ao total, pois os triângulos geradores são semelhantes.

6. Relações entre as áreas e os volumes dos cones semelhantes.

1.^a

As áreas laterais ou totais de dois cones semelhantes estão entre si como os quadrados dos raios, ou das alturas ou das geratrizes.

Sejam r e r_1 os raios, g e g_1 as geratrizes e h e h_1 as alturas. (fig. 100). Teremos:

$$\frac{S_t}{S'_t} = \frac{\pi r g}{\pi r_1 g_1} = \frac{r}{r_1} \times \frac{g}{g_1}$$

Donde em virtude de (1):

$$\frac{S}{S'} = \frac{r^2}{r_1^2} = \frac{g^2}{g_1^2}$$

Analogamente, temos:

$$\frac{S_t}{S'_t} = \frac{\pi r (g + r)}{\pi r_1 (g_1 + r_1)} = \frac{r}{r_1} \times \frac{g + r}{g_1 + r_1}$$

Da igualdade (1), conclui-se:

$$\frac{r}{r_1} = \frac{g}{g_1} = \frac{r + g}{r_1 + g_1}$$

logo, vem:

$$\frac{S_t}{S'_t} = \frac{r}{r_1} \times \frac{r}{r_1} = \frac{r^2}{r_1^2} = \frac{h^2}{h_1^2} = \frac{g^2}{g_1^2}$$

2.^a

Os volumes de dois cones semelhantes estão entre si como os cubos dos raios ou das alturas.

Temos:

$$\frac{V}{V'} = \frac{\frac{\pi r^2 h}{3}}{\frac{\pi r_1^2 h_1}{3}} = \frac{r^2 h}{r_1^2 h_1} = \frac{r^2}{r_1^2} \times \frac{h}{h_1} = \frac{r^3}{r_1^3}$$

OBSERVAÇÃO: O cone que se destaca por uma seção paralela à base de um cone, lhe é semelhante.

7. Troncos de cone. O tronco de cone de primeira ou segunda espécie é o limite para o qual tende o tronco de pirâmide da mesma espécie cujo número de lados da base aumenta indefinidamente. Podemos, então concluir:

1.º Tronco de primeira espécie.

$$S_e = \lim (p + p') a$$

$$V = \lim \frac{h}{3} (B + b_1 + \sqrt{Bb_1})$$

Donde, passando aos limites, como vimos para o cone:

$$S_e = \pi \cdot (r + r_1) \cdot g$$

$$V = \frac{h}{3} (\pi r^2 + \pi r_1^2 + \sqrt{\pi^2 \cdot r^2 \cdot r_1^2})$$

ou

$$V = \frac{\pi h}{3} (r^2 + r_1^2 + rr_1)$$

2.º) **Tronco de segunda espécie.** Teremos, análogamente:

$$V = \frac{\pi h}{3} (r^2 + r_1^2 - rr_1)$$

8. **Desenvolvimento da superfície lateral.** A superfície lateral do cone desenvolve-se num plano, segundo um setor circular (fig. 102), cujo arco AA_1 tem o mesmo comprimento, $2\pi r$, da circunferência da base do cone e cujo raio, VA , é igual a geratriz g do cone.

O comprimento do arco AA_1 , de raio g , será, de acordo com a fórmula de retificação:

$$\frac{\pi g n}{180^\circ},$$

onde n é o número de graus do setor.

Por outro lado o comprimento do mesmo arco é o da circunferência da base; isto é, $2\pi r$. Daí, a equação:

$$\frac{\pi g n}{180} = 2\pi r$$

donde resulta:

$$n = \frac{360 r}{g}$$

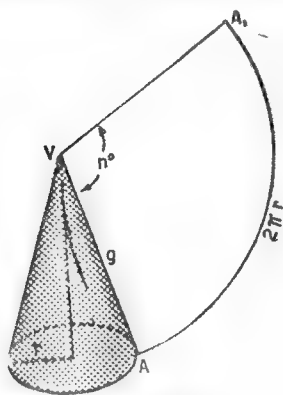


Fig. 102

fórmula que dá o número de graus do ângulo central, conhecidas a geratriz e o raio. Esta fórmula permite construir o desenvolvimento da superfície lateral do cone.

EXERCÍCIOS

1. O diâmetro da base de um cone de revolução mede 10 cm e a geratriz mede 13 cm. Calcular a altura. *Resp.: 12 cm.*
2. Calcular o raio da base e a altura de um cone de revolução cuja área lateral vale $600\pi \text{ cm}^2$ e cuja geratriz tem 25 cm. *Resp.: 24 cm. e 7 cm.*
3. Calcular o volume do cone equilátero, cuja circunferência da base mede 25,12 cm. *Resp.: $64 \cdot \pi \cdot \sqrt{3}/3 \text{ cm}^3$.*

Preencha as lacunas com os elementos assinalados na coluna, nos seguintes cones de revolução:

- | | r | g | h | S_l | S_t | V |
|----|-------|-------|-------|--------------------------------|-------|---------|
| 4. | | | 8 | | | |
| 5. | 6 | | | | | |
| 6. | | 13 | | $65 \cdot \pi$ | | |
| 7. | 4 | | | $16 \cdot \pi \cdot \sqrt{10}$ | | |
| 8. | 5 | | | | | 50π |
| 9. | | | 4 | | | 48π |
10. Calcular o volume gerado por um triângulo retângulo que gira em torno da hipotenusa e cujos catetos têm 15 cm e 20 cm respectivamente. *Resp.: $1200\pi \text{ cm}^3$.*
 11. Calcular o volume de um cone de revolução, cuja área lateral é igual ao triplo da área da base e o raio desta mede $\sqrt{2}$ cm. *Resp.: $8\pi/3 \text{ cm}^3$.*
 12. Calcular o volume de um cone equilátero, cuja área da secção meridiana mede 9 dm^2 . *Resp.: $3\pi \sqrt[3]{27} \text{ dm}^3$.*
 13. Calcular o volume de um cone equilátero, cuja altura tem 3 dm. *Resp.: $3\pi \text{ dm}^3$.*
 14. O diâmetro da base de um cone de revolução mede 8 cm e a área de sua secção meridiana mede 12 cm^2 . Calcular sua área lateral. *Resp.: $62,80 \text{ cm}^2$ ($\pi = 3,14$).*
 15. Um triângulo retângulo que tem 6 cm^2 de área e 5 cm de hipotenusa, gira em torno do maior cateto. Calcular o volume do sólido gerado. *Resp.: $12\pi \text{ cm}^3$.*
 16. Um quadrado de lado 6 cm gira em torno da diagonal. Calcular a área lateral e o volume do sólido gerado. *Resp.: $36\pi \sqrt{2} \text{ cm}^2$ e $36\pi \sqrt{2} \text{ cm}^3$.*
 17. Calcular o volume gerado pela revolução de um triângulo equilátero em torno de um dos lados, tendo cada um destes 6 cm. *Resp.: $54\pi \text{ cm}^3$.*

18. Calcular o volume gerado pela revolução de um triângulo de lados 10 cm, 17 cm e 21 cm, girando em torno do maior lado. *Resp.*: $448\pi \text{ cm}^3$.
19. Dois lados de um triângulo medem respectivamente 4 cm e 8 cm e o ângulo por eles formado, 120° . Calcular o volume do sólido gerado pela revolução do triângulo em torno do menor lado. *Resp.*: $64\pi \text{ cm}^3$.
20. Um cilindro e um cone de revolução são equivalentes e assentam sobre a mesma base, cujo raio é de 24 cm. A altura do cilindro é de 6 cm. Calcular a área lateral da parte do cone que é exterior ao cilindro. *Resp.*: $320\pi \text{ cm}^2$.
21. Calcular a área lateral de um cone de revolução em que a circunferência da base mede 37,68 cm e a altura é $\frac{2}{3}$ do diâmetro da base. *Resp.*: $188,40 \text{ cm}^2$.
22. Calcular a geratriz de um cone, cuja área lateral tem $31,4 \text{ dm}^2$ e a área da base, $12,56 \text{ dm}^2$. *Resp.*: 5 dm.
23. Calcular a área total de um cone gerado por um triângulo retângulo cuja área é de 24 m^2 e a hipotenusa tem 10 m, quando gira em torno do cateto maior. *Resp.*: $301,44 \text{ m}^2$.
24. Calcular o perímetro do triângulo gerador de um cone de revolução que tem para área lateral $188,40 \text{ m}^2$ e para área total $301,44 \text{ m}^2$. *Resp.*: 24 m.
25. A base de um cone de revolução está inscrita na base de um prisma quadrangular regular e o vértice coincide com o centro da outra base. A área lateral do prisma é $\frac{3}{2}$ da área da base e a altura tem 12 dm. Calcular o volume e a área lateral do cone. *Resp.*: $1\,024\pi \text{ dm}^3$ e $320\pi \text{ dm}^2$.
26. Calcular as bases de um trapézio isósceles circunscrito a um círculo de raio 5, sabendo-se que o volume gerado pelo trapézio girando em torno da base maior é de $1\,000\pi$ e que a soma das bases é 25. (Esc. Militar, 1941). *Resp.*: 20 e 5.
27. Calcular o volume de um cone de revolução, cujo raio da base mede 6 m e cuja geratriz é igual à diagonal de um cubo tendo como aresta o lado de um triângulo equilátero inscrito em um círculo de raio igual a $\frac{10}{3}$ do m . (E. N. de Engenharia, 1946). *Resp.*: $96\pi \text{ m}^3$.
28. Um quadrado, de lado a , gira em torno de um eixo que passa por um de seus vértices e é paralelo à diagonal do quadrado que não passa por esse vértice. Calcular o volume gerado. (Fac. Nac. de Filosofia, 1946). *Resp.*: $\pi a^3 \sqrt{2}$.
29. Calcular a área da secção meridiana de um cone circular reto, sabendo que a altura do cone tem a mesma medida que a circunferência da base e que o apótema do hexágono regular inscrito na base é igual a 3 m. (E. Naval, 1946) (*) *Resp.*: $24\pi \text{ m}^2$.

(*) Este exercício foi simplificado.

30. Calcular a superfície lateral e o volume de um cone de altura 26,75 m, sabendo que a circunferência da base está circunscrita a um quadrado de lado 12,83 m (ob: Cálculo por logaritmos) (E. Nac. de Engenharia, 1923). *Resp.*: $805,036 \text{ m}^2$ e $2\,305,521 \text{ m}^3$.
31. A diferença entre os raios dos círculos das bases de um tronco de cone reto é 2 cm e a altura 1 dm. Calcular o volume desse tronco, sabendo que a razão entre as áreas das bases é $\frac{4}{9}$. (E. Aeronáutica, (1945) *Resp.*: $795,720 \text{ cm}^3$.
32. Calcular o volume de um cone de revolução, conhecendo-se a área lateral S e a distância d do centro da base a uma geratriz. (Fac. Fil. São Bento, São Paulo, 1951). *Resp.*: $\frac{Sd}{3}$.
33. Em um cone de altura h e raio r , inscrever um cilindro (com base sobre a base do cone) tal que a soma de sua altura com o raio de sua base seja m . Calcular a altura e o raio do cilindro. (Fac. Fil. São Bento, São Paulo, 1950) *Resp.*:

$$\frac{r(h-m)}{h-r} \text{ e } \frac{h(m-r)}{h-r}$$
34. Calcular o volume de um tronco de cone, cujos raios das bases medem, respectivamente, 5 m e 8 m, e cuja geratriz mede 5 m (Fac. Fil. Univ. D. F., 1947). *Resp.*: $172\pi \text{ m}^3$.
35. Corta-se um cone de revolução de altura h por um plano paralelo à base. A que distância do vértice deve estar o plano para que a razão da área da secção para a área da base seja m ? (Fac. C. L. da U. Paraná, 1951): *Resp.*: $h\sqrt{m}$.
36. Um cone circular de altura a e raio r é cortado por um plano paralelo à base. Calcular a altura do cone parcial assim determinado de modo que a sua superfície lateral seja igual à superfície lateral do tronco. (E. Nac. Engenharia, 1941). *Resp.*: $\frac{a\sqrt{2}}{2}$.
37. Provar que, se V_a , V_b , V_c são os volumes gerados por um triângulo ABC , retângulo em A , girando em torno sucessivamente dos lados BC , CA e AB , tem-se a relação

$$\frac{1}{V_a^2} = \frac{1}{V_b^2} + \frac{1}{V_c^2}$$
(E. de Engenharia da U. Minas Gerais, 1947 — Fac. E. Industrial — São Paulo, 1950).
38. Calcular o volume de um cone de revolução, sabendo que:
a) a distância do centro do círculo da base ao ponto P que divide a corda $AB = 6 \text{ m}$ na razão $\frac{AP}{AB} = \frac{1}{3}$ é igual a 1 m;

- b) a mediana do triângulo gerador relativa à hipotenusa tem para comprimento 2,5 m. (E. de Engenharia de Julz de Fora, 1951).
Resp.: $12\pi \text{ m}^2$.
39. Um triângulo retângulo, cujos catetos são $a = 3 \text{ cm}$ e $b = 4 \text{ cm}$, gira sucessivamente em torno do cateto b e da hipotenusa c , gerando respectivamente os volumes V_b e V_c . Calcular a relação entre esses dois volumes. (Esc. Técnica do Exército, 1951). *Resp.*: $\frac{5}{4}$
40. Calcular o volume de um tetraedro regular da mesma altura de um cone equilátero, cujo volume é numericamente igual à sua área total.
Resp.: $\frac{729 \sqrt{3}}{8}$.
41. Dado um cone de 4 dm de altura, a que distância do vértice deve-se cortá-lo por um plano paralelo à base a fim de dividi-lo em duas partes equivalentes?
Resp.: $2\sqrt[3]{4}$.
42. A geratriz de um cone tem 9 cm. Quais os segmentos determinados sobre ela por dois planos paralelos à base e que dividem o cone em três partes proporcionais aos números 2, 3 e 4?
Resp.: $3\sqrt[3]{6}$, $3(\sqrt[3]{15} - \sqrt[3]{6})$, $3(3 - \sqrt[3]{15})$.

Questões de Concurso:

43. Num tronco de cone de revolução a geratriz é igual ao raio da base maior e a duas vezes e meia o raio da base menor. Calcule o comprimento dessa geratriz sabendo, ainda, que a área lateral do tronco é igual a $35\pi \text{ m}^2$. (E. N. E., 1958). *Resp.*: 5 m.
44. A área da secção meridiana de um cone equilátero de raio R tem para expressão (E. Flu. E., 1958).
45. Um tronco de cone tem os raios das bases medindo 10 cm e 4 cm. A geratriz mede 10 cm. Calcule o volume do tronco. (E. Flu. E.). *Resp.*: $202,66\pi \text{ cm}^2$.
46. Superfície cônica é (E. P. U. C. — Rio, 1958).
47. Secciona-se um cone de geratriz g e altura h por um plano paralelo à base e passando pelo ponto médio da altura. Calcule a razão entre o volume do cone dado e o do tronco assim obtido. (E. N. E. — 1960). *Resp.*: $8/7$.
48. Um cone e um cilindro equiláteros têm mesma altura. Calcule a razão entre as áreas e os volumes dos dois sólidos. (E. N. E. — 1959). *Resp.*: $2/3$ e $4/9$.

CAPÍTULO VIII

ESFERA

I) PROPRIEDADES GERAIS

1. Definições.

Superfície esférica é a superfície de revolução gerada pela rotação de uma semi-circunferência em torno do diâmetro (fig. 103).

Esfera é o sólido limitado por uma superfície esférica, incluídos os pontos dessa superfície.

O centro, o raio e o diâmetro do semi-círculo gerador denominam-se, também, **centro**, **raio** e **diâmetro** da esfera.

Consequências.

1.ª) Na rotação em torno do diâmetro, um ponto qualquer M da semi-circunferência (fig. 103) manter-se-á a uma distância constante (raio) do centro. Assim, a **superfície esférica** é o lugar geométrico dos pontos do espaço, cuja distância ao centro é constante.

2.ª) Qualquer ponto, cuja distância ao centro é maior que o raio, é **exterior** à superfície esférica.

Qualquer ponto, cuja distância ao centro é menor que o raio, é **interior** à superfície esférica.

2. Propriedades.

- 1.ª Toda secção plana de uma esfera é um círculo.

Demonstração.

Consideremos uma esfera O de raio R (fig. 104) e um plano secante M .

Trata-se de provar que a secção AB é um círculo.

Do centro O tracemos a perpendicular OC ao plano M e consideremos um ponto P , da linha de intersecção.

De acôrdo com a hipótese os pontos A , B e P são da linha de intersecção e, portanto, estão na superfície esférica, concluindo-se:

$$OA = OB = OP = R, \quad (1)$$

qualquer que seja P .

Sendo iguais as oblíquas ao plano M , afastam-se igualmente do pé da perpendicular; logo:

$$CA = CB = CP.$$

Assim, o ponto C é equidistante de todos os pontos da linha APB . Por conseguinte, esta linha é uma circunferência, e a secção é um círculo.

OBSERVAÇÃO. O centro do círculo da secção é o pé da perpendicular traçada do centro da esfera ao plano da secção (ponto C).

Conseqüências.

Representemos por R — o raio da esfera, por r — o raio da secção e, finalmente, por d — a distância OC do centro ao plano da secção.

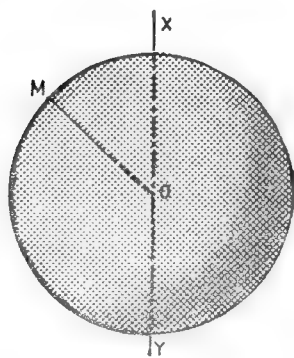


FIG. 103

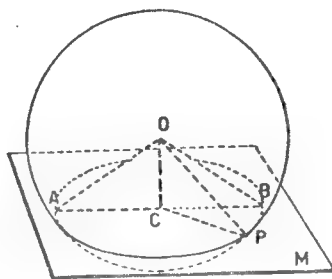


FIG. 104

O triângulo retângulo OCB fornece a relação (fig. 104).

$$r^2 = R^2 - d^2 \quad (I)$$

O raio r depende, por conseguinte, de d , por ser R constante, concluindo-se as conseqüências:

1.ª) Na mesma esfera, a secção plana varia em sentido contrário ao de sua distância ao centro.

Realmente, em virtude de (I) quanto maior fôr o valor de d , menor será o de r e inversamente.

2.ª) Na mesma esfera, duas secções equidistantes do centro são congruentes.

Em virtude da relação (I), se as distâncias forem iguais, serão também iguais os raios das secções.

3.ª) No caso particular $d = 0$, isto é, em que o plano M contém o centro, conclui-se:

$$r = R.$$

A secção denomina-se, então, **círculo máximo** ou **meridiano**.

Em oposição, as secções que não contêm o centro são denominadas **círculos menores**.

4.ª) Se $d = R$, conclui-se:

$$r = 0.$$

A secção reduz-se a um ponto (fig. 105). O plano M terá um único ponto C comum com a esfera e será um **plano tangente**.

Conclui-se: **O plano perpendicular a um raio em seu ponto extremo, é tangente.**

O ponto comum C é o **ponto de contacto**.

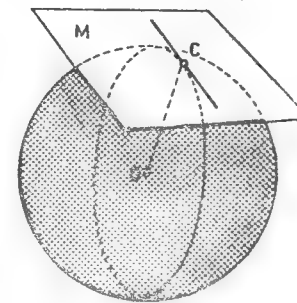


FIG. 117

2.^a

Por quatro pontos não situados no mesmo plano passa uma esfera e apenas uma.

Sejam os quatro pontos A, B, C, D , não situados no mesmo plano. Os três primeiros pontos, A, B e C , determinam um plano M e, neste plano, uma circunferência de centro O (fig. 106).

Analogamente, os três pontos A, B e D determinam um segundo plano P e neste, a circunferência de centro O' . Assim, AB é uma corda comum às duas circunferências.

As perpendiculares traçadas do centro de cada círculo à corda comum AB , cortar-se-ão no ponto médio E dessa corda, em virtude da teoria do círculo e determinarão um plano OEO' perpendicular a AB ; conseqüentemente, aos planos M e P .

Se, do ponto O , traçarmos a reta Δ , perpendicular ao plano M , a mesma ficará contida no plano OEO' e terá os pontos eqüidistantes de A, B e C .

Do mesmo modo a reta Δ' , perpendicular ao plano P no ponto O' , ficará contida em OEO' e terá todos os pontos eqüidistantes de A, B e D .

Como Δ e Δ' estão situadas no mesmo plano OEO' e são concorrentes em virtude da construção, terão um ponto de intersecção I , eqüidistante dos quatro pontos A, B, C e D .

O ponto I é, pois, o centro de uma esfera que passa nos quatro pontos.

Esta esfera é única porque as retas Δ e Δ' têm um único ponto de intersecção, isto é, o ponto I é o único ponto do espaço eqüidistante dos quatro pontos. A distância comum é o raio da esfera.

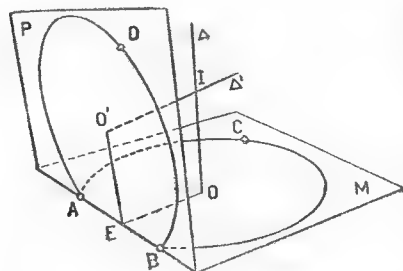


FIG. 106

APLICAÇÃO. *Determinação da esfera.* De acôrdo com a segunda propriedade conclui-se que a esfera fica determinada:

1.º) Por quatro pontos não situados no mesmo plano.

2.º) Por um círculo e um ponto exterior. Realmente, se considerarmos três pontos na circunferência do círculo, o ponto exterior será um quarto ponto não situado no plano dos três primeiros.

3.º) Por dois círculos secantes ou tangentes não complanares. Pois, neste caso, é possível tomar sôbre as circunferências quatro pontos não situados no mesmo plano.

3.^a

Por dois pontos não diametrais da superfície esférica passa sempre um círculo máximo.

Suponhamos os pontos A e B da superfície esférica (fig. 107). Estes dois pontos e o centro não são colineares; logo, determinarão um plano, cuja secção na esfera é um círculo máximo por conter o centro.

Distância esférica entre os pontos A e B é o comprimento do arco AB do círculo máximo. Este arco é o *menor percurso* que se pode fazer sôbre a *superfície esférica* entre os pontos A e B .

3. Polos. Distância polar.

a) *Definições.* POLOS de um círculo da esfera são as extremidades P e P' do diâmetro perpendicular ao plano do mesmo círculo (fig. 108).

Dessa definição resulta que todos os círculos paralelos têm os mesmos polos.

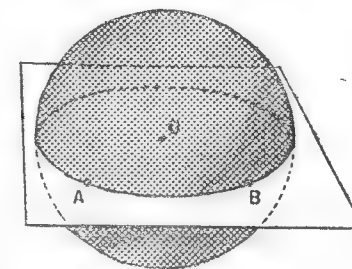


FIG. 107

(fig. 105) pertence ao plano perpendicular a OC no ponto C . Ora, este plano é tangente à esfera (n.º 2, quarta consequência); logo, a reta não pode ter mais de um ponto comum com a esfera.

Resulta, então, que todas as tangentes traçadas pelo mesmo ponto da superfície esférica ficam situadas no plano tangente (fig. 105).

5. Superfície cônica e cone circunscritos. Do ponto exterior A , tracemos uma tangente AB à esfera (fig. 109).

A reta AB e o ponto O determinam um plano que corta a esfera segundo o círculo máximo MBN e AB é tangente a este círculo.

A rotação de AB em torno de OA como eixo, gerará uma superfície cônica de revolução cujo vértice é o ponto A por ser constante o ângulo A . O ponto B descreverá o círculo menor CD .

A superfície cônica, que é o lugar geométrico das tangentes traçadas do ponto A , denomina-se **superfície cônica circunscrita**. O círculo menor CD é o **círculo de contacto**.

Observemos que no triângulo retângulo OBA , a geratriz AB da superfície cônica e o raio OB da esfera são catetos, a distância AO , do ponto ao centro, é hipotenusa e o raio do círculo de contacto é a altura.

Cone circunscrito à esfera é o cone limitado pela superfície cônica circunscrita e cujo plano da base é tangente à esfera.

6. Superfície cilíndrica e cilindro circunscritos. Consideremos um diâmetro AB e tracemos pelo ponto qualquer uma tangente CX paralela a AB (fig. 110).

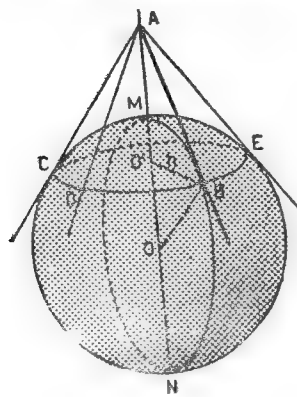


FIG. 109

As retas AB e CX determinam um plano que corta a esfera segundo o círculo máximo ACB .

A distância de CX ao diâmetro AB é o raio OC da esfera; assim, se CX girar em torno de AB , gerará uma superfície cilíndrica de revolução, que se denomina **superfície cilíndrica circunscrita**. O círculo máximo DCE é o **círculo de contacto**.

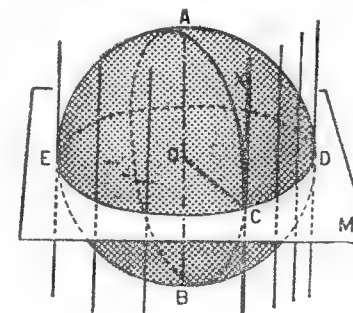


FIG. 110

Observemos que a superfície cilíndrica circunscrita é o lugar geométrico das tangentes à esfera, paralelas a uma direção dada.

Cilindro circunscrito é o cilindro limitado pela superfície cilíndrica circunscrita e por dois planos tangentes à esfera, em A e B , que são suas bases.

O cilindro circunscrito é sempre **equilátero**.

II) ÁREA DA SUPERFÍCIE ESFÉRICA E DE SUAS PARTES

7. Teorema fundamental.

A área da superfície gerada por um segmento que gira em torno de um eixo de seu plano, sem o atravessar, é igual ao produto de sua projeção sobre o eixo pela circunferência, cujo raio é a parte da mediatriz do segmento gerador, compreendida entre este e o eixo.

Seja XY o eixo de rotação e AB , o segmento gerador. Se representarmos por h a projeção e por m , o segmento da mediatriz, teremos a tese (fig. 111, 112 e 113).

$$S_{AB} = 2\pi mh.$$

Três casos podem ocorrer.

PRIMEIRO CASO: O segmento AB é paralelo ao eixo (fig. 111).

Neste caso, o segmento AB gera a superfície lateral de um cilindro de revolução de raio m e altura h , logo, temos:

$$S_{AB} = 2\pi mh$$

SEGUNDO CASO: O segmento tem uma extremidade sobre o eixo. (fig. 112).

Neste caso, o segmento gera a superfície lateral de um cone de revolução, cuja geratriz é AB e cujo raio é BC .

Temos, pois:

$$S_{AB} = \pi \cdot BC \times AB \quad (1).$$

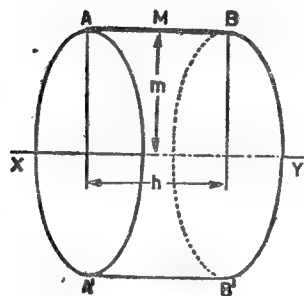


FIG. 111

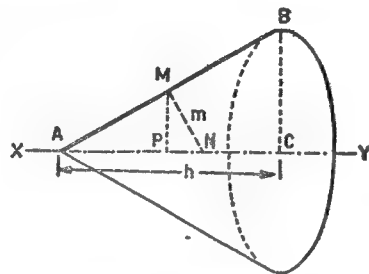


FIG. 112

Traçando MP perpendicular ao eixo, teremos, por ser M o ponto médio de AB :

$$MP = \frac{BC}{2} \therefore BC = 2 \cdot MP.$$

O valor de BC substituído em (1), dará:

$$S_{AB} = 2\pi \cdot MP \times AB \quad (2)$$

Se considerarmos os triângulos semelhantes ABC e MNP , concluiremos

$$\frac{AB}{m} = \frac{h}{MP} \therefore MP \times AB = mh.$$

Substituindo o valor do produto $MP \times AB$ na igualdade (2), resulta, finalmente:

$$S_{AB} = 2\pi mh$$

TERCEIRO CASO: O segmento gerador é oblíquo ao eixo e não o encontra (fig. 113).

Neste caso, o segmento AB gera a superfície lateral de um tronco de cone de bases paralelas. Logo, temos:

$$S_{AB} = \pi (BC + AD) \cdot AB \quad (1).$$

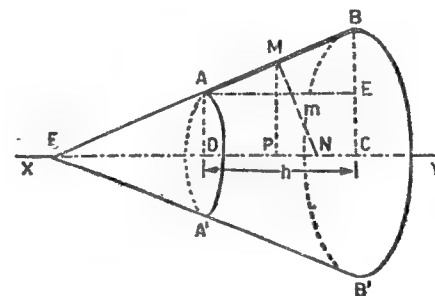


FIG. 113

Em virtude da hipótese, M é ponto médio de AB e, portanto, a perpendicular MP , ao eixo, é base média do trapézio $ABCD$, concluindo-se:

$$MP = \frac{AD + BC}{2} \therefore AD + BC = 2 \cdot MP$$

Substituindo este valor em (1), vem:

$$S_{AB} = 2\pi \cdot MP \times AB \quad (2).$$

Considerando os triângulos retângulos semelhantes ABE e MNP ($A = M$, por terem lados perpendiculares) resulta:

$$\frac{AB}{m} = \frac{AE}{MP} \text{ ou } \frac{h}{MP} \therefore MP \times AB = mh.$$

Substituindo o valor do produto $MP \times AB$ na igualdade (2), conclui-se, finalmente:

$$S_{AB} = 2\pi mh$$

O teorema fica, assim, demonstrado em todos os casos.

OBSERVAÇÃO. No caso particular em que o segmento AB é perpendicular ao eixo, a superfície gerada é a de um círculo, ou de uma coroa circular, segundo o segmento encontra ou não o eixo.

8. Aplicação. Superfície gerada por uma poligonal regular.

A área da superfície gerada por uma linha poligonal regular que gira em torno de um eixo passando pelo seu centro sem a atravessar é igual ao produto de sua projeção sobre o eixo pela circunferência, cujo raio é o apótema da mesma poligonal.

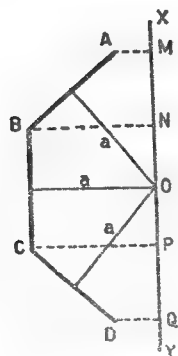


Fig. 114

Seja o eixo XY e a poligonal regular $ABCD$, de centro O . (fig. 114).

De acordo com o teorema fundamental, temos:

$$S_{AB} = MN \cdot 2\pi a$$

$$S_{BC} = NP \cdot 2\pi a$$

$$S_{CD} = PQ \cdot 2\pi a$$

Somando, membro a membro, resulta:

$$S_{ABCD} = (MN + NP + PQ) \cdot 2\pi a.$$

ou

$$S_{ABCD} = MQ \cdot 2\pi a$$

9. Área da zona esférica.

a) Definições. Zona é a parte da superfície esférica compreendida entre duas seções planas paralelas (fig. 115).

As duas seções são as BASES e a distância $O'O''$ entre os dois planos é a ALTURA da zona.

A zona é gerada pela rotação do arco AD em torno do diâmetro.

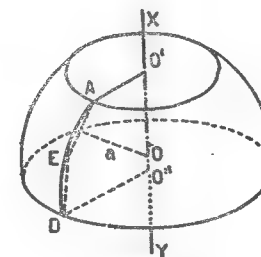


Fig. 115

b) Cálculo da área.

A área da zona é igual ao produto de sua altura pela circunferência de círculo máximo da esfera.

Suponhamos a poligonal AED , inscrita no arco gerador da zona. Em virtude do teorema anterior, podemos concluir, sendo s a área gerada pela poligonal:

$$s = O'O'' \cdot 2\pi a. \quad (1)$$

Se dobrarmos indefinidamente o número de lados da poligonal seu limite será o arco AD , a área s terá por limite a área S da zona, o apótema a tenderá para o raio R da esfera e a altura $O'O'' = h$ permanece constante. Assim, no limite, a relação (1) será:

$$S = 2\pi R h$$

que é a área da zona.

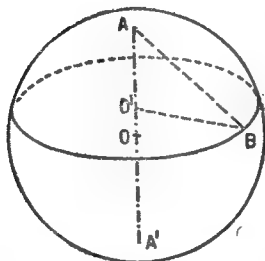


FIG. 116

10. Área da calota.

CALOTA é a zona de uma só base, isto é, a parte da superfície esférica limitada por um círculo menor (fig. 116).

A área da calota é, pois, obtida pela mesma fórmula da zona:

$$S = 2\pi R \times AO' \quad (1)$$

Se, no entanto, considerarmos a corda AB do arco gerador, as relações métricas no círculo darão:

$$AB^2 = 2R \times AO'$$

Substituindo o produto $2R \times AO'$ na igualdade (1), virá

$$S = \pi \cdot AB^2$$

Conclui-se:

A área da calota é igual à área do círculo, cujo raio é a corda do arco gerador.

11. Área da superfície esférica.

A área da superfície esférica é igual a quatro vezes a área de seu círculo máximo.

Realmente, a superfície esférica é uma zona, cuja altura é o diâmetro. Substituindo h por $2R$ na fórmula da área da zona, resulta:

$$S = 2\pi R \times 2R$$

ou

$$S = 4\pi R^2$$

OBSERVAÇÕES:

- 1.ª) A área da superfície esférica é igual à área lateral do cilindro circunscrito.
- 2.ª) As áreas de duas esferas estão entre si como os quadrados dos raios ou dos diâmetros.

Sendo S e S_1 as áreas e R e R_1 , os raios, teremos

$$S = 4\pi R^2$$

$$S_1 = 4\pi R_1^2$$

donde:

$$\frac{S}{S_1} = \frac{4\pi R^2}{4\pi R_1^2} = \frac{R^2}{R_1^2} = \frac{d^2}{d_1^2}$$

12. Fuso esférico.

a) **Definição.** Fuso é a parte da superfície esférica compreendida entre dois semi-círculos máximos que têm o diâmetro comum (fig. 117).

O fuso fica determinado por intermédio do diedro AB ou, o que é o mesmo, pelo arco CD de círculo máximo, compreendido entre seus dois arcos ACB e ADB . Assim, o arco CD dá a medida do fuso.

b) **Área do fuso.** A área da esfera vale $4\pi R^2$ e corresponde a um fuso de 360° ; logo, o fuso de 1° terá por medida:

$$\frac{4\pi R^2}{360} = \frac{\pi R^2}{90}$$

Para o fuso de n graus, teremos, então, a fórmula geral:

$$S = \frac{\pi R^2 n}{90}$$

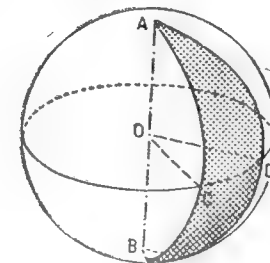


FIG. 105

III) VOLUME DA ESFERA E DE SUAS PARTES

13. Teorema fundamental.

O volume gerado por um triângulo que gira em torno de um eixo traçado em seu plano por um de seus vértices sem o atravessar, é igual ao produto da área gerada pelo lado oposto ao vértice fixo por um terço da altura correspondente.

Seja o triângulo ABC e o eixo XY traçado pelo vértice A e h , a altura relativa ao lado BC oposto ao vértice A . Teremos a tese:

$$V_{ABC} = S_{BC} \times \frac{h}{3}.$$

Demonstração. Três casos podem ocorrer.

PRIMEIRO CASO: O triângulo tem um lado sobre o eixo. (fig. 118).

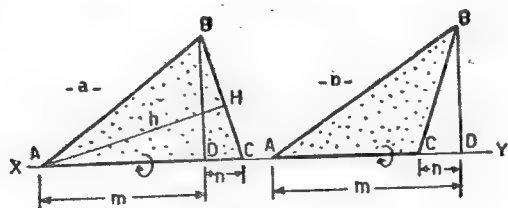


FIG. 118

Neste caso, o volume gerado por ABC será a soma dos cones gerados por ADB e BDC (fig. a) ou a diferença (fig. b), segundo o triângulo for acutângulo ou obtusângulo. Teremos então nas duas hipóteses:

$$(a) \quad V_{ABC} = \frac{1}{3} \pi BD^2 m + \frac{1}{3} \pi BD^2 n = \frac{1}{3} \pi BD^2 \cdot (m + n)$$

ou

$$(b) \quad V_{ABC} = \frac{1}{3} \pi BD^2 m - \frac{1}{3} \pi BD^2 n = \frac{1}{3} \pi BD^2 \cdot (m - n)$$

Como em (a) a soma $m + n$ é AC e em (b) a diferença $m - n$ é, também AC , vem:

$$V_{ABC} = \frac{1}{3} \pi \cdot BD^2 \cdot AC \quad (1)$$

O produto $BD \times AC$ é igual ao produto $BC \times AH$ ou $BC \times h$, por serem ambos o dobro da área do triângulo; logo, substituindo em (1) o produto $BD \times AC$ por seu igual, vem:

$$V_{ABC} = \frac{1}{3} \pi \cdot BD \cdot BC \cdot h$$

O produto $\pi BD \cdot BC$ é a área gerada por BC concluindo-se, finalmente:

$$V_{ABC} = S_{BC} \times \frac{h}{3}$$

SEGUNDO CASO: O lado oposto ao vértice fixo é oblíquo ao eixo e não o encontra (fig. 119).

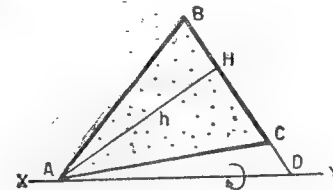


FIG. 119

Neste caso teremos:

$$V_{ABC} = V_{ABD} - V_{ACD} \quad (1)$$

E, portanto, de acordo com o primeiro caso:

$$V_{ABC} = S_{BD} \times \frac{h}{3} - S_{CD} \times \frac{h}{3} = (S_{BD} - S_{CD}) \times \frac{h}{3}$$

donde, finalmente:

$$V_{ABC} = S_{BC} \times \frac{h}{3}$$

TERCEIRO CASO: O lado oposto ao vértice fixo é paralelo ao eixo (fig. 120).

O volume gerado pelo triângulo ABD é um cone equivalente a $1/3$ do cilindro gerado pelo retângulo $ADBH$; logo, o volume gerado pelo triângulo AHB será equivalente aos $2/3$ do mesmo cilindro. Analogamente, o volume gerado pelo triângulo AHC será $2/3$ do cilindro gerado pelo retângulo $AHCE$. Por conseguinte, o volume gerado pelo triângulo ABC será $2/3$

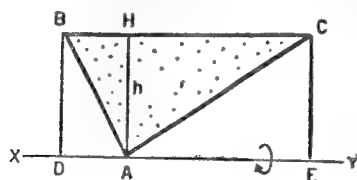


FIG. 120

do volume do cilindro gerado pelo retângulo total $BCED$, concluindo-se:

$$V_{ABC} = \frac{2}{3} \pi \cdot h^2 \cdot BC \quad (1)$$

ou

$$V_{ABC} = \frac{h}{3} \times 2\pi h \cdot BC$$

Como o produto $2\pi h \cdot BC$ é a área da superfície cilíndrica gerada por BC , temos:

$$V_{ABC} = S_{BC} \times \frac{h}{3}$$

14. Aplicação: volume gerado por um setor poligonal.

O volume gerado por um setor poligonal regular girando em torno de um diâmetro que não o atravessa é igual ao produto da área gerada pela linha poligonal por um terço do apótema.

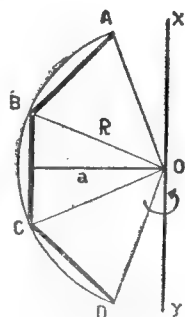


FIG. 121

De acordo com o teorema fundamental, temos (fig. 121):

$$V_{OAB} = S_{AB} \times \frac{a}{3}$$

$$V_{OBC} = S_{BC} \times \frac{a}{3}$$

$$V_{OCD} = S_{CD} \times \frac{a}{3}$$

Somando, membro a membro, resulta:

$$V_{OABCD} = (S_{AB} + S_{BC} + S_{CD}) \times \frac{a}{3} = S_{ABCD} \times \frac{a}{3}.$$

15. Volume do setor esférico.

a) **Definição.** SETOR ESFÉRICO é o volume gerado por um setor circular girando em torno de um diâmetro que não o atravessa (fig. 121).

O setor esférico é o limite do volume gerado por um setor poligonal quando o número de lados cresce indefinidamente.

b) **Volume do setor.** Suponhamos a poligonal $ABCD$ inscrita. Sendo V o volume gerado pelo setor poligonal teremos de acordo com o n.º anterior:

$$V_{OABCD} = S_{ABCD} \times \frac{a}{3}$$

Se o número de lados da poligonal cresce indefinidamente, a área por ela gerada tende para a zona, o apótema para o raio R , e o volume gerado, para o setor esférico; logo, sendo V o volume do setor e Z a área da zona virá.

$$V = Z \times \frac{R}{3}.$$

Donde, finalmente, por ser $2\pi R h$ a área da zona:

$$V = \frac{2}{3} \pi R^2 h$$

c) **Observação.** O volume do setor é $2/3$ do volume do cilindro que tem o raio igual ao da esfera e a altura igual a da zona correspondente.

16. Volume da esfera.

O volume da esfera é igual ao produto de sua área por um terço do raio.

A esfera é o volume gerado por um semi-círculo; logo, pode ser considerado como um setor esférico, cuja altura é o diâmetro $2R$. Substituindo h por $2R$ no volume do setor, temos, então, o da esfera:

$$V = \frac{2}{3} \pi R^2 \times 2R$$

ou

$$V = \frac{4}{3} \pi R^3$$

OBSERVAÇÕES:

1.º) Se representarmos por d o diâmetro da esfera, teremos:

$$R = \frac{d}{2},$$

e portanto,

$$V = \frac{4}{3} \pi \left(\frac{d}{2} \right)^3 = \frac{4}{3} \pi \frac{d^3}{8}$$

ou

$$V = \frac{1}{6} \pi d^3$$

que é o volume da esfera em função do diâmetro.

2.º) Os volumes de duas esferas estão entre si como os cubos dos raios ou dos diâmetros.

Realmente, supondo duas esferas de raios R e R_1 , teremos:

$$V = \frac{4}{3} \pi R^3 \quad V_1 = \frac{4}{3} \pi R_1^3$$

donde: $\frac{V}{V_1} = \frac{R^3}{R_1^3} = \frac{d^3}{d_1^3}$.

17. Volume da cunha esférica.

a) **Definição.** CUNHA ESFÉRICA é a parte da esfera limitada por um fuso e os dois semi-círculos máximos do mesmo fuso (fig. 122).

b) **Fórmula do volume.** A cunha fica determinada pelo número de graus do fuso correspondente. Assim, a esfera pode ser considerada como a cunha de 360° ; logo, o volume da cunha de 1° , será:

$$v = \frac{\frac{4}{3} \pi R^3}{360} = \frac{\pi R^3}{270};$$

e, para a cunha de n graus, teremos, de modo geral:

$$V = \frac{\pi R^3 n}{270}$$

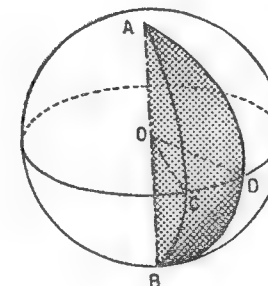


FIG. 122

18. Anel esférico.

a) **Definição.** ANEL ESFÉRICO é o volume gerado por um segmento circular girando em torno de um diâmetro que não o atravessa (fig. 123).

b) **Fórmula do volume**

O volume do anel é $1/6$ do volume do cilindro, cujo raio é a corda AB do segmento gerador e cuja altura é a projeção h dessa corda sobre o diâmetro.

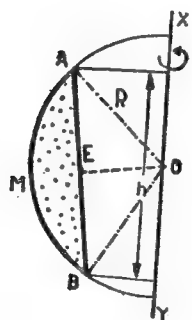


FIG. 123

O volume do anel (fig. 123) é a diferença entre os volumes gerados pelo setor $OAMB$ e pelo triângulo OAB , isto é:

$$V_a = V_{OAMB} - V_{OAB} \quad (1)$$

Teremos então:

$$V_{OAMB} = \frac{2}{3} \pi R^2 h$$

$$e \quad V_{OAB} = S_{AB} \times \frac{OE}{3} = 2\pi OE \times h \times \frac{OE}{3} = \frac{2}{3} \pi OE^2 \cdot h.$$

Substituindo os valores em (1) e colocando $\frac{2}{3} \pi h$ em evidência.

$$V_a = \frac{2}{3} \pi h (R^2 - OE^2)$$

$$\text{No triângulo } OAE \text{ temos: } R^2 - OE^2 = AE^2 = \frac{AB^2}{4}$$

logo vem:

$$V_a = \frac{2}{3} \pi h \times \frac{AB^2}{4}$$

ou, simplificando:

$$V_a = \frac{1}{6} \pi \overline{AB}^2 \cdot h$$

19. Segmento esférico.

a) **Definição.** SEGMENTO ESFÉRICO é a parte da esfera limitada por uma zona e os dois círculos de suas bases (fig. 124).

Se a zona tem uma só base (calota) o segmento esférico diz-se de *uma base* (fig. 125).

ALTURA do segmento é a altura da zona que o limita.

b) Fórmula do volume.

O volume do segmento de duas bases é igual à soma da esfera cujo diâmetro é a sua altura, com a média aritmética dos cilindros da mesma altura, cujas bases são as do segmento.

O volume do segmento de duas bases é a soma do volume gerado pelo segmento AMB com o tronco de cone gerado pelo trapézio $ABCD$, isto é:

$$V = V_{AMB} + V_{ABCD}$$

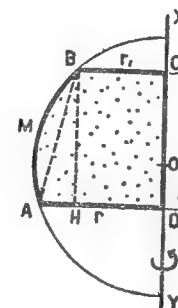


FIG. 124

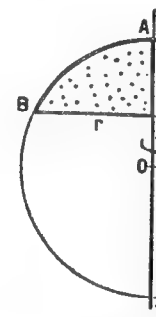


FIG. 125

Calculando os volumes, temos:

$$V = \frac{1}{6} \pi \overline{AB}^2 \cdot h + \frac{\pi h}{3} (r^2 + r_1^2 + r r_1)$$

$$\text{ou} \quad V = \frac{1}{6} \pi h (\overline{AB}^2 + 2r^2 + 2r_1^2 + 2rr_1) \dots \dots (1)$$

No triângulo retângulo AHB , temos: $BH = h$ e $AH = r - r_1$; logo, vem:

$$AB^2 = h^2 + (r - r_1)^2 = h^2 + r^2 + r_1^2 - 2rr_1.$$

Substituindo o valor AB^2 em (1):

$$V = \frac{1}{6} \pi h (h^2 + 3r^2 + 3r_1^2)$$

donde, finalmente:

$$V = \frac{1}{6} \pi h^3 + \frac{\pi r^2 h + \pi r_1^2 h}{2}$$

OBSERVAÇÕES:

1.ª) No caso do segmento de uma base, teremos:

$$r_1 = 0,$$

donde

$$V = \frac{1}{6} \pi h^3 + \frac{\pi r^2 h}{2} = \frac{\pi h}{6} (h^2 + 3r^2)$$

2.ª) No segmento de uma base, tem-se (fig. 125):

$$r^2 = h(2R - h).$$

Substituindo na fórmula anterior, obteremos, sucessivamente:

$$V = \frac{1}{6} \pi h^3 + \frac{1}{2} \pi h^2 (2R - h)$$

ou
$$V = \frac{1}{6} \pi h^3 + \frac{1}{6} \pi h^2 (6R - 3h)$$

$$V = \frac{1}{6} \pi h^2 (h + 6R - 3h) = \frac{1}{6} \pi h^2 (6R - 2h)$$

donde, finalmente, a fórmula independente de r :

$$V = \frac{1}{3} \pi h^2 (3R - h)$$

EXERCÍCIOS

1. Calcular a área da secção feita numa esfera de 15 cm de raio por um plano que dista 9 cm do centro. *Resp.: 452,16 cm².*
2. Uma superfície esférica de raio igual a 5 cm é cortada por um plano. O comprimento da circunferência da secção é de 18,84 cm. Calcular a distância da secção ao centro. *Resp.: 4 cm.*
3. Achar o raio da secção feita numa esfera de 26 cm de diâmetro, sabendo-se que o plano da secção dista 5 cm do centro. *Resp.: 12 cm.*
4. Os raios de duas secções paralelas da mesma esfera situadas do mesmo lado do centro medem, respectivamente, 5 cm e 12 cm e a distância entre as secções é de 7 cm. Achar o raio da esfera. *Resp.: 13 cm.*
5. Os raios de duas esferas concêntricas medem, respectivamente, 5 cm e 3 cm. Calcular a área da secção feita na esfera maior por um plano tangente à menor. *Resp.: 50,24 cm².*
6. Os raios de duas secções paralelas da mesma esfera, situadas de lados opostos em relação ao centro medem, respectivamente, 6 cm e 8 cm. A distância entre as secções é de 14 cm. Calcular o raio da esfera. *Resp.: 10 cm.*
7. O raio da base de uma calota esférica mede 12 cm e a altura, 9 cm. Calcular o raio da esfera. *Resp.: 12,5 cm.*
8. Calcular a distância polar de um círculo mínimo distante 2 cm do centro de uma esfera de 4 cm de raio. *Resp.: 4 cm.*
9. O raio de um círculo mínimo mede 12 cm e a distância polar 15 cm. Calcular o raio da esfera. *Resp.: 12,5 cm.*
10. Uma secção, feita a 6 cm do centro de uma esfera, tem 8 cm de raio. Calcular a distância polar do círculo da secção. *Resp.: 8,94 cm.*
11. Calcular a distância polar de um círculo máximo de uma esfera de 10 cm de raio. *Resp.: 14,14 cm.*
12. O círculo da secção feita a 3,5 dm do centro de uma esfera tem 15 dm para distância polar. Calcular o raio da esfera. *Resp.: 12,5 dm.*
13. Numa esfera de 6,5 m de raio faz-se uma secção, cuja circunferência tem 5 m de distância polar. Calcular o raio da secção. *Resp.: $r \approx 4,62$ m.*
14. Calcular o raio de uma secção plana de uma esfera, sendo as distâncias polares do círculo da secção respectivamente iguais a 4 cm e 4. $\sqrt{3}$ cm. *Resp. 3,464 cm.*
15. Achar a área total e o volume de uma esfera, cujo diâmetro tem 6 cm. *Resp.: 36π cm² e 36π cm³.*

16. O volume de uma esfera é de $288\pi \text{ m}^3$. Calcular a área. *Resp.*: $144\pi \text{ m}^2$.
17. Um triângulo regular e um quadrado estão circunscritos a um círculo de raio igual a 2 cm de tal modo que uma das alturas do triângulo é paralela a um dos lados do quadrado. Calcular os volumes gerados pelas três figuras quando fazem uma rotação completa em torno da altura do triângulo. *Resp.*: $33,504 \text{ cm}^3$, $50,24 \text{ cm}^3$ e $75,36 \text{ cm}^3$.
18. Calcular a área de um fuso de 45° em uma esfera de 2 cm de raio. *Resp.*: $6,28 \text{ cm}^2$.
19. Numa esfera de 144 cm^2 de área, tem-se um fuso de 36 cm^2 de área. Calcular o ângulo do fuso. *Resp.*: 90° .
20. A diferença entre os raios de duas esferas é de 5 cm e o fuso de 9° da primeira é equivalente ao fuso de 64° da segunda. Calcular os raios. *Resp.*: 8 cm e 3 cm.
21. Calcular a área de uma superfície esférica, onde o comprimento de uma semi-circunferência de círculo máximo é de 12,56 cm. *Resp.*: $64\pi \text{ cm}^2$.
22. Calcular a área da superfície esférica e o volume da esfera inscrita em um cubo com 216 cm^3 de área total. *Resp.*: $36\pi \text{ cm}^2$ e $36\pi \text{ cm}^3$.
23. A área de uma superfície esférica é de $113,04 \text{ cm}^2$. Calcular o volume do espaço compreendido entre essa esfera e o cubo circunscrito. *Resp.*: $102,96 \text{ cm}^3$.
24. Numa esfera de raio igual a 10 cm considera-se uma zona, cujas bases têm respectivamente 6 cm e 8 cm de raio. Calcular a área da zona quando fica situada em um mesmo hemisfério e quando situada nos dois hemisférios. *Resp.*: 40π e 280π .
25. Numa esfera de raio 5 cm, o fuso de 36° é equivalente a uma zona da mesma esfera. Calcular a altura da zona. *Resp.*: $h = 1 \text{ cm}$.
26. O volume de uma esfera é de $36\pi \text{ cm}^3$. Calcular a área da zona, cuja altura é dois terços do raio da esfera. *Resp.*: $12\pi \text{ cm}^2$.
27. Num círculo de 12 m de diâmetro dá-se um segmento de 60° . Calcular o volume gerado pelo segmento girando em torno do diâmetro que passa pela extremidade de sua corda. *Resp.*: $18\pi \text{ m}^3$.
28. Achar a área total do cone equilátero circunscrito à esfera de raio 2 cm. *Resp.*: 36π .
29. Achar o volume do cubo inscrito numa esfera de raio R . *Resp.*: $\frac{8R^3 \sqrt{3}}{9}$.
30. Achar a superfície da esfera circunscrita a um tetraedro de aresta a . *Resp.*: $\frac{3}{2} a^2 \pi$.

31. A aresta de um cubo é de 1 m. Determinar o volume da esfera circunscrita. *Resp.*: $\frac{\pi \sqrt{3}}{2}$.
32. Calcular o volume do cubo inscrito numa esfera de raio 1 m. *Resp.*: $\frac{8\sqrt{3}}{9}$.
33. Achar a razão entre o volume de uma esfera de raio R e o de um cubo nela inscrito (E. P. U. C. — Rio de Janeiro, 1950). *Resp.*: $\frac{\pi \sqrt{3}}{2}$.
34. Calcular o volume de uma esfera, cujo círculo máximo é o círculo circunscrito a um triângulo equilátero de 4 m de lado. (Fil. U. D. F., 1947). *Resp.*: $\frac{256 \pi \sqrt{3}}{27}$.
35. Calcular o volume da esfera, cuja área é igual a área de um losango, cujas diagonais medem, respectivamente, 8 m e 12 m. (Fil. U. D. F., 1948). *Resp.*: $\frac{32 \sqrt{3\pi}}{\pi}$.
36. Calcular o volume da esfera, cujo raio é a altura do tetraedro que tem para aresta o segmento de reta determinado pelos pontos médios dos lados não paralelos do trapézio isósceles de altura 2 m e bases 1 m e 3 m. (Fil. U. D. F., 1948). *Resp.*: $\frac{64\pi \sqrt{6}}{27}$.
37. Calcular a área da secção feita numa esfera de 2 m de raio por um plano que diste 0,8 m do centro. (I. T. A., 1952). *Resp.*: $336\pi \text{ dm}^2$.
38. Uma esfera de raio 1 e um cone de raio 1 e altura 2, apoiam-se sobre um plano horizontal P . A que distância do plano P deve estar um plano paralelo a fim de que as áreas das secções determinadas nos dois sólidos sejam iguais? (E. P. U. C., 1949). *Resp.*: 2 ou 0,4.
39. Determinar o raio da esfera da qual seja possível destacar uma calota de altura igual a 2 m e cuja área seja igual ao triplo da superfície lateral do cone tendo para vértice o centro da esfera e por base a base da calota (E. N. de Engenharia, 1953). *Resp.*: 1,44 m.
40. Em uma esfera de raio R acha-se inscrito um cone de revolução de altura $\frac{5}{3} R$. Determinar a área lateral do tronco de cone que se obtém traçando-se um plano paralelo à base, sabendo-se que os raios das bases do tronco estão na razão de 3 para 4. (Fac. Eng. Ind. — São Paulo, 1951). *Resp.*: $\frac{35 \pi R^2 \sqrt{6}}{144}$.

41. Uma secção, a 2 cm do centro de uma esfera, determina duas calotas, cujas áreas estão entre si na razão $3/4$. Calcular o raio da esfera.
 Resp.: 14 cm.
42. A altura de um cone circular reto é o dobro do raio r da base. Calcular o volume da esfera circunscrita em função de r . (E. Técnica do Exército, 1947). Resp.: $\frac{125\pi r^3}{48}$
43. A que distância do centro se deve cortar uma esfera E de raio R , por um plano secante P , de modo que o volume da esfera seja igual a quatro vezes a soma dos volumes de dois cones tais que:
- a) a base comum seja a intersecção de P com E ;
 - b) as geratrizes de um dos cones sejam tangentes à esfera.
 - c) o vértice do outro coincida com o centro.
- (E. Técnica do Exército, 1946). Resp.: $\frac{R}{2} (\sqrt{5} - 1)$.
44. Um cone equilátero está inscrito em uma esfera de raio R . Calcular o excesso do volume da esfera sobre o volume do cone. Resp.: $\frac{23}{24}\pi R^3$.
45. Duas esferas são inscrita e circunscrita a um mesmo octaedro regular. Calcular a razão de seus volumes. (E. Eng. de São Carlos, U. São Paulo, 1953). Resp.: $\frac{\sqrt{3}}{9}$
46. Dados uma esfera de raio R e um ponto A a uma distância $OA = x$ do centro, considera-se um cone de vértice A circunscrito à esfera e limitado de um lado pelo vértice A e do outro, pelo círculo de contacto com essa mesma esfera. Calcular:
- 1.º) a área lateral e o volume deste cone;
 - 2.º) a área da porção de esfera interior ao cone.
- Dados: $x = 3$ m
 $R = 2$ m Resp.: $10,47$ m², $3,877$ m³ e $8,37$ m².
47. Achar a razão entre os volumes de dois tetraedros regulares, um inscrito e outro circunscrito a uma mesma esfera. Resp.: $\frac{1}{27}$.
48. O volume de um tronco de cone é equivalente ao de uma esfera de raio 1,8 m. A altura do tronco é 2,4 m e o raio de uma das bases é igual a 2 m. Pede-se o raio da outra base. (E. Militar, 1933).
 Resp.: 1,592 m.

49. Calcular a área da menor secção determinada em uma esfera de raio R por um plano que divide o diâmetro em média e extrema razão. Aplicar ao caso em que R é igual a 1 m. (E. Militar, 1940).
 Resp.: $4\pi (\sqrt{5} - 2)$.
50. Uma esfera de raio igual a 1 cm está inscrita num tronco de cone de revolução. O volume do tronco é o dobro do volume da esfera. Calcular a área do trapézio semelhante à secção meridiana do tronco na razão $h = 3$. (E. Técnica do Exército, 1945). Resp.: $18\sqrt{5}$ cm².
51. Achar o raio de uma esfera, cuja área é média proporcional entre as áreas laterais de um cilindro e de um cone que têm a mesma altura igual a 2 m e cujo raio da base comum é igual a 1 m. (E. Militar, 1945). Resp.: $\frac{1}{2} \sqrt[3]{80}$ m.
52. Uma esfera está inscrita num cubo. Calcular o volume da porção não ocupada pela esfera, sabendo que a aresta do cubo mede 10 m. (Escola Preparatória de São Paulo, 1943). Resp.: $476,500$ m³.
53. Calcular o volume de uma esfera circunscrita a um cone equilátero cuja altura mede 16 dm. (E. N. Química, 1945). Resp.: $5080,834$ dm³.
54. Calcular a área total e o volume do cone circular reto circunscrito à esfera de diâmetro 5 cm, sabendo-se que a sua altura é o quádruplo desse diâmetro. (E. N. de Engenharia, 1945). Resp.:
 $\frac{500\pi}{9}$ cm² e $\frac{200\pi}{3}$ cm³.
55. Dada uma esfera S , de diâmetro $AB = 2R$, considera-se o cone C , de vértice A , de altura AB e de raio R . Calcular o volume do sólido comum à esfera S e ao cone C .
 (Volume do seg. esférico de uma base = $\frac{\pi h}{6} (3r^2 + h^2)$)
 (E. Eng. Ind. de São Paulo, 1951) Resp.: $1,1072\pi R^3$

Questões de Concurso:

56. Calcule a razão do volume do cilindro equilátero inscrito em uma esfera de raio R para o volume do cilindro equilátero circunscrito à mesma esfera. (E. N. E., 1958).
 Resp.: $\frac{\sqrt{2}}{4}$.
57. A área de uma secção plana de uma esfera de raio $3\sqrt{3}$ m equivale à área de um fuso de 30° dessa esfera. Calcule a distância da secção plana ao centro da esfera. (E. N. E., 1958). Resp.: 3 m.
58. Calcule a área do octaedro regular inscrito numa esfera cuja secção meridiana tem 16π m² de área. (E. N. E., 1958). Resp.: $64\sqrt{3}$ m².

59. Um tronco de cone de revolução está inscrito em uma esfera de $576\pi\text{cm}^2$ de área. A geratriz do tronco mede 6cm e uma das bases do tronco está a 2cm do centro da esfera. Calcule a distância da outra base ao centro, sabendo que o centro da esfera está fora do tronco. (E. N. E., 1958).
60. Um círculo de centro O tem 4,5 cm de raio. De um ponto M exterior ao círculo traça-se uma tangente à circunferência desse círculo, de modo que a distância de M ao ponto A de contacto seja dupla da distância de M à circunferência. Calcule a área lateral e o volume da figura gerada pelo triângulo de vértices A , M e O , girando em torno de MO . (E. N. E., 1958).
61. A área de uma esfera é igual a 60 m^2 . Calcule a área total do cilindro equilátero circunscrito a essa esfera. (E. Flu. E.).
62. A hipotenusa de um triângulo retângulo mede 10 cm e um dos catetos 6 cm. Calcule o volume gerado por esse triângulo girando em torno da hipotenusa. (E. Flu. E., 1958). Resp.: $76,8\pi$.
63. Anel esférico é (E. P. U. C. — Rio, 1958).
64. Polos de uma secção plana da esfera são (E. P. U. C. — Rio, 1958).
65. A corda de um arco de 120° de uma circunferência de círculo mede $5\sqrt{3}\text{ cm}$. Calcule a razão entre as áreas das calotas esféricas geradas por essa circunferência girando em torno do diâmetro perpendicular a essa corda. (E. P. U. C. — Rio, 1958).
66. O volume de uma esfera de raio igual a 2 m, inscrita em um tronco de cone de revolução, é igual à metade do volume do tronco. Calcule os raios das bases do tronco. (E. P. U. C. — Rio, 1958).
67. Uma esfera está inscrita em um cone de revolução de raio igual a 9m e geratriz igual a 15m. Calcule as áreas das calotas determinadas sobre a esfera pelo paralelo de contacto do cone e da esfera. (E. P. U. C. — Rio — 1959). Resp.: $16,2\pi$ e $64,8\pi$.
68. Duas esferas tangentes estão inscritas num cone. Sabendo que o raio da maior é o dobro do raio da menor, pede-se o volume do cone em função do raio da esfera menor. (E. N. E. — 1960). Resp.: $64\pi r^3/3$.
69. O centro de uma esfera de raio 6cm é o vértice de um cone de revolução de duas folhas no qual duas geratrizes opostas formam um ângulo de 120° . Calcule o volume da parte da esfera exterior a esse cone. (E. F. E. — 1960). Resp.: $54\pi\text{cm}^3$.

UNIDADE V

Secções cônicas

I) ELIPSE

1. Definições. ELIPSE é a curva plana tal que a soma das distâncias de qualquer de seus pontos a dois pontos fixos de seu plano é constante:

Os dois pontos fixos, F e F' (fig. 126) denominam-se focos.

A soma constante representa-se por $2a$, visto que, a simplificação do fator 2 conduz a fórmulas mais simples.

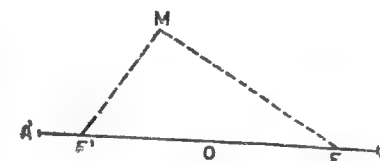


FIG. 126

Na figura 126, sendo F e F' os focos de uma elipse e a soma constante $2a$, o ponto M pertencerá à elipse se tivermos:

$$MF + MF' = 2a.$$

Os segmentos MF e MF' que unem um ponto qualquer M , da curva aos focos, denominam-se **raios vetôres** desse ponto.

Distância focal é o comprimento FF' determinado pelos focos. A distância focal representa-se por $2c$, com objetivo idêntico ao citado para a constante $2a$. Assim, considerando o ponto médio O do segmento $F'F$, teremos:

$$FF' = 2c \quad \text{e} \quad OF' = OF = c.$$

2. Traçado da elipse.

PRIMEIRO PROCESSO: construção por um movimento contínuo (fig. 127). Fixam-se, nos focos F e F' , as extremidades de um fio inextensível de comprimento $2a$. Esticando-se o fio com a ponta P de um lápis, este, deslizando no plano continuamente descreverá uma curva como a da figura 129. A curva traçada desse modo é uma elipse, pois, por ser o fio inextensível, teremos em qualquer posição da ponta P :

$$PF + PF' = 2a.$$

OBSERVAÇÕES:

1.ª De acôrdo com essa construção conclui-se que a elipse é uma curva plana e fechada.

2.ª Na construção são conhecidos os focos e a constante $2a$.

SEGUNDO PROCESSO: construção por pontos. Sejam F e F' os focos e $2a$, a constante dada. Tracemos a reta FF' e, a partir do ponto médio O do segmento FF' tomemos (fig. 128):

$$OA' = OA = a. \quad (1)$$

A e A' SÃO DOIS PONTOS DA ELIPSE. Realmente, para o ponto A temos:

$$AF = OA - OF = a - c$$

e

$$AF' = OA + OF' = a + c$$

Somando, membro a membro: $AF + AF' = 2a$; logo, o ponto A pertence à elipse.

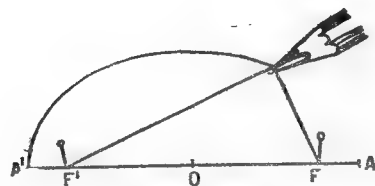


FIG. 127

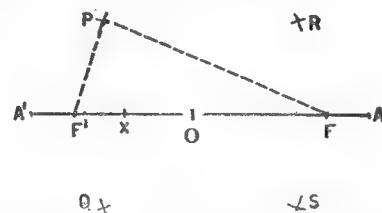


FIG. 128

Analogamente demonstraríamos que o ponto A' pertence à curva. Temos, assim, dois pontos da curva.

Para obter outros pontos, tomemos um ponto qualquer X do segmento FF' .

$$\text{Teremos: } AX + A'X = AA' = 2a \quad (2)$$

Com centro em F e raio AX tracemos um círculo e com centro em F' e raio $A'X$ tracemos um segundo círculo.

Êstes dois círculos cortam-se em P e Q que são dois pontos da elipse.

$$\text{Realmente: } PF = AX \\ PF' = A'X$$

$$\text{logo } PF + PF' = AX + A'X = AA' = 2a,$$

e P está na curva. Idêntico raciocínio faríamos para o ponto Q .

Permutando os centros F e F' dos dois círculos obteríamos dois novos pontos da curva, R e S (fig. 128).

Se o ponto X variar sobre FF' , obteremos, de modo análogo, outros tantos pontos da curva.

Unindo os pontos assim obtidos, ficará traçada uma elipse de focos F e F' .

OBSERVAÇÃO. O raio vetor máximo AF' ou $A'F$ é igual a $a + c$ e o raio vetor mínimo AF ou $A'F'$ é igual a $a - c$.

3. Eixos de simetria. Centro de simetria.

1.ª AA' é um eixo de simetria. Seja M (fig. 129) um ponto da elipse, isto é:

$$MF + MF' = 2a. \quad (1)$$

Trata-se de provar que seu simétrico, M' , em relação a AA' , pertence à curva. Se M' é simétrico de M , conclui-se que AA' é mediatriz de MM' ; logo, teremos:

$$M'F = MF \text{ e } M'F' = MF'.$$

Somando, membro a membro, vem:

$$M'F + M'F' = MF + MF' = 2a,$$

e o ponto M' está na curva.

O eixo AA' é o EIXO FOCAL, por conter os focos.

2.º) BB' é um eixo de simetria. Seja P o simétrico de M em relação a BB' (fig. 129). Trata-se de provar que o ponto P pertence à curva.

Os pontos M e F são respectivamente simétricos de P e F' . Como dois segmentos simétricos em relação a um eixo são iguais, temos:

$$PF' = MF \quad (2)$$

Assim, o trapézio $MFF'P$ é isósceles e, portanto, tem as diagonais iguais, isto é:

$$PF = MF' \quad (3)$$

Adicionando as igualdades (2) e (3), vem:

$$PF + PF' = MF + MF',$$

logo, o ponto P pertence à curva, em virtude da igualdade (1).

O eixo BB' é o EIXO NÃO FOCAL.

3.º) O ponto O é um centro de simetria da curva. Seja Q o simétrico de M em relação a O (fig. 129).

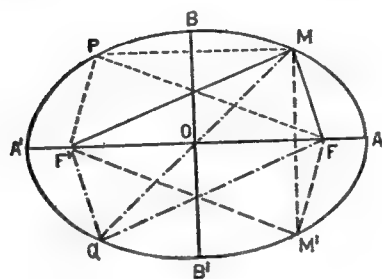


FIG. 129

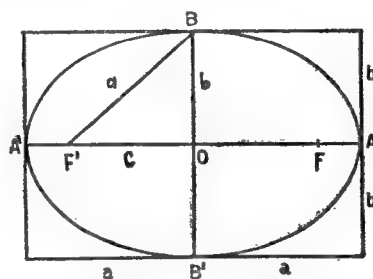


FIG. 130

Trata-se de provar que o ponto Q pertence à curva.

Em virtude da simetria em relação ao ponto O , os segmentos MQ e FF' cortam-se ao meio; logo, o quadrilátero $MFQF'$ é um paralelogramo, concluindo-se:

$$QF' = MF \text{ e } QF = MF'$$

Adicionando, membro a membro, vem:

$$QF' + QF = MF + MF'$$

e o ponto Q pertence à curva, em virtude da igualdade (1).

4. Comprimento dos eixos. Vértices.

Comprimento dos eixos da elipse são os segmentos AA' e BB' determinados sobre os eixos pelos pontos de interseção com a curva.

O comprimento do eixo focal AA' é, portanto, $2a$.

O comprimento do eixo não focal BB' representa-se por $2b$.

No triângulo retângulo BOF' (fig. 130), tem-se:

$$BO < BF' \text{ ou } b < a,$$

por essa razão o eixo focal AA' , é denominado EIXO MAIOR e o eixo não focal BB' , EIXO MENOR da elipse.

Vértices da elipse são os quatro pontos A , A' , B e B' em que a curva intercepta os eixos.

A elipse fica determinada por seus eixos visto como os focos F e F' serão as intersecções com o eixo maior, da circunferência de raio a traçada com o centro em B .

5. Relações entre os eixos e a distância focal.

1.º) Considerando o triângulo MFF' , (fig. 129), temos:

$$FF' < MF + MF' \text{ ou } 2c < 2a$$

donde

$$\boxed{c < a} \quad (I)$$

Assim, para que a curva exista é necessário que a distância focal seja menor que a constante $2a$.

2.º) No triângulo retângulo BOF , (fig. 130) tem-se:

$$BF^2 = OB^2 + OF^2$$

daí, a relação entre os comprimentos dos eixos e a distância focal

$$a^2 = b^2 + c^2 \quad (\text{II})$$

6. Excentricidade.

Excentricidade é a razão $\frac{c}{a}$ entre a distância focal e o eixo maior. Representa-se pela letra e , concluindo-se:

$$e = \frac{c}{a}$$

Como c é menor que a (relação I), conclui-se:
 $e < 1$,

isto é, a **excentricidade da elipse é menor que 1**.

Se substituirmos c por seu valor tirado da relação II, virá:

$$e = \frac{\sqrt{a^2 - b^2}}{a}$$

que é a fórmula da excentricidade, quando são conhecidos os eixos.

Variação da excentricidade. A excentricidade varia de 0 a 1. Tem, pois, duas cotas, uma inferior e outra superior.

1.ª) **cota inferior:** $e = 0$.

Neste caso tem-se $c = 0$, e, portanto $FF' = 0$.

F e F' se confundem e teremos: $MO = MF = MF' = a$.

A curva é, neste caso, uma circunferência de centro em F e raio a .

A circunferência é uma elipse de excentricidade nula.

2.ª) **Cota superior:** $e = 1$.

Neste caso temos $c = a$ e $FF' = 2a$.

A curva reduz-se ao segmento FF' .

Observa-se que a excentricidade variando entre as cotas 0 e 1, a elipse varia desde a circunferência alongando-se até a reta.

Quanto maior a excentricidade tanto mais alongada será a elipse.

7. O ponto em relação à elipse. A elipse é uma curva fechada (traçado contínuo, n.º 2); logo, divide o plano em duas regiões uma interior e outra exterior, não sendo possível passar de uma a outra sem atravessar a curva.

Um ponto pode, pois, ocupar três posições em relação à elipse.

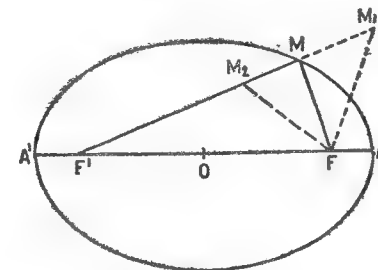


FIG. 131

1.ª) O ponto está na curva. Denomina-se **ponto aferente**.

Seja o ponto M (fig. 131). Neste caso tem-se, por definição:

$$MF + MF' = 2a \quad (1)$$

2.ª) O ponto está na região exterior. **Ponto exterior.**

Seja M_1 (fig. 131). Neste caso, ligando-o ao foco F' , o segmento $F'M_1$ intercepta a curva em um ponto M ; teremos, então, no triângulo M_1MF ;

$$M_1F + M_1M > MF$$

e, adicionando MF' aos dois membros:

$$M_1F + M_1M + MF' > MF + MF'$$

Como o segundo membro vale $2a$, vem, efetuando também $M_1M + MF'$:

$$M_1F + M_1F' > 2a \quad (2)$$

3.ª) O ponto está na região interior. **Ponto interior.**

Seja M_2 (fig. 131). Neste caso, o segmento $F'M_2$, prolongado, corta a curva num ponto M . O triângulo MM_2F dá:

$$M_2F < MF + MM_2.$$

Somando M_2F' aos dois membros, e fazendo as mesmas substituições anteriores, virá:

$$M_2F + M_2F' < MF + MM_2 + M_2F' \therefore$$

$$M_2F + M_2F' < 2a \quad (3)$$

CONCLUSÕES.

1.ª) A condição necessária e suficiente para que um ponto seja *aferente*, *interior* ou *exterior* à elipse é que a soma de suas distâncias aos focos seja *igual*, *menor* ou *maior* que $2a$.

2.ª) As relações 1, 2 e 3 justificam a definição da curva como *lugar geométrico*, pois, os pontos que não lhe pertencem não satisfazem à condição da definição. Isto é: **elipse é o lugar geométrico dos pontos de um plano, cuja soma das distâncias a dois pontos fixos de seu plano é constante.**

8. Círculos da elipse.

Círculos diretores. São dois círculos traçados de cada um dos focos como centro e com raio igual ao comprimento $2a$ do eixo maior (fig. 132).

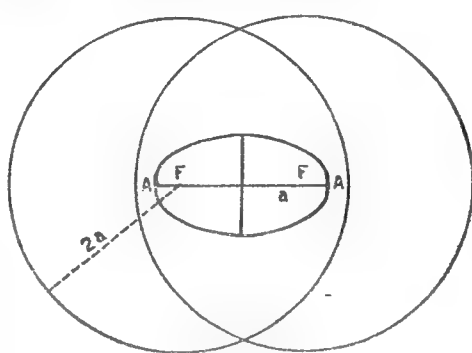


FIG. 132

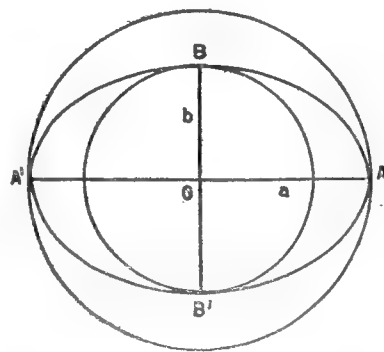


FIG. 133

Círculo principal — é o círculo que tem o mesmo centro da elipse e cujo raio é o semi-eixo maior, a (fig. 133).

Círculo auxiliar — é o círculo que tem o mesmo centro da elipse e cujo raio é o semi-eixo menor, b (fig. 133).

9. Propriedades da elipse.

a) Propriedade fundamental.

Qualquer ponto da elipse é equidistante de um dos focos e da circunferência do círculo diretor do outro foco.

Demonstração.

Seja M um ponto qualquer da elipse e $(F', F'P)$ o círculo diretor do foco F' (fig. 134).

A distância do ponto M ao círculo diretor é o segmento MP do raio $F'P$ que passa em M .

Por definição de círculo diretor, teremos:

$$MP = 2a - MF' \quad (1),$$

e, por definição de elipse:

$$MF = 2a - MF'. \quad (2)$$

Das igualdades (1) e (2), conclui-se:

$$MP = MF$$

Recíproca.

Qualquer ponto equidistante de um dos focos e do círculo diretor do outro foco, pertence à elipse.

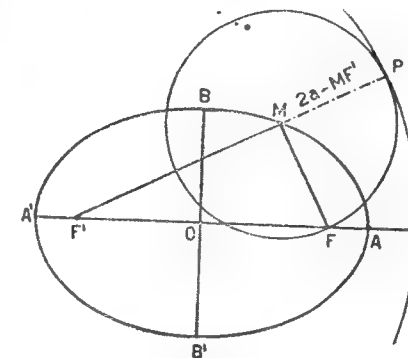


FIG. 134

Demonstração.

Se MP (fig. 134) é a distância de um ponto M ao círculo (F' , $F'P$) o suporte do segmento MP contém o centro F' desse círculo; donde resulta:

$$MP + MF' = 2a \quad (1)$$

Em virtude da hipótese, temos:

$$MP = MF;$$

Substituindo em (1):

$$MF + MF' = 2a,$$

e o ponto M é da elipse.

Consequências.

- 1.ª) A elipse é o lugar geométrico dos pontos do plano equidistantes de um dos focos e do círculo diretor do outro foco.
- 2.ª) A elipse é o lugar geométrico dos centros dos círculos tangentes a uma circunferência fixa e que passam por um ponto fixo interior à circunferência dada.

Realmente, o ponto fixo será uma dos focos e a circunferência fixa o círculo diretor do outro foco.

APLICAÇÃO. Traçado da elipse por pontos, dados os focos e o eixo maior. Tracemos um raio qualquer do círculo diretor de centro F' . Liguemos a extremidade P desse raio ao foco F e tracemos a mediatriz de PF (fig. 135).

A interseção M da mediatriz com o raio $F'P$ é um ponto da elipse, em virtude da recíproca do teorema fundamental. Fazendo variar o raio $F'P$ obteremos outros tantos pontos da elipse.

b) Propriedades das tangentes.

1.ª

Em todo ponto da elipse existe uma tangente que é a bissetriz externa do ângulo dos raios vetores desse ponto.

Demonstração.

De acôrdo com a construção da elipse por pontos (fig. 135), baseada na propriedade fundamental, a reta MQ , mediatriz de FP , tem um ponto M na elipse. Se os demais pontos da mediatriz forem exteriores à curva, essa mediatriz será tangente.

Consideremos, então, um ponto qualquer Q da mediatriz e liguemo-lo aos pontos P , F e F' . Teremos, no triângulo QPF'

$$QP + QF' > PF' \quad (1)$$

PF' é o raio $2a$ do círculo diretor e QP é igual a QF ; logo a desigualdade (1) pode ser escrita,

$$QF + QF' > 2a$$

portanto Q é exterior e existe a tangente em M .

Os triângulos MPR e MRF são congruentes por serem simétricos em relação à mediatriz QM ; logo, temos:

$$\alpha = \alpha'$$

e a tangente é bissetriz externa do ângulo dos raios vetores MF e MF' .

Consequências.

- 1.ª) A tangente em um ponto forma ângulos iguais com os raios vetores desse ponto.

Realmente α' e β são iguais como opostos pelo vértice e, portanto, $\alpha = \beta$.

- 2.ª) A normal à elipse é bissetriz interna do ângulo dos raios vetores do ponto de contacto.

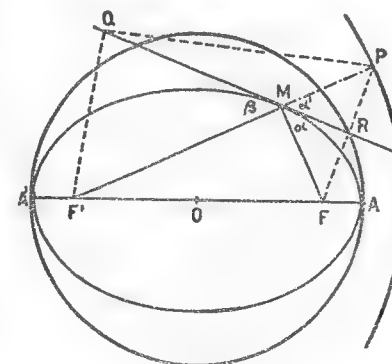


FIG. 135

A normal é perpendicular à tangente; logo, os ângulos são iguais como complementos de ângulos iguais.

3.ª) O simétrico de um foco em relação a uma tangente à elipse fica situado na circunferência do círculo diretor do outro foco.

Realmente, na fig. 135 o ponto P é simétrico de F , em relação à reta tangente MQ .

4.ª) As tangentes nos vértices são perpendiculares aos eixos.

Dêse modo, a elipse é inscritível num retângulo que tem dimensões iguais aos eixos (fig. 130).

2.ª

O lugar geométrico das projeções ortogonais de qualquer dos focos sobre as tangentes à elipse é o círculo principal (La Hire)

Na figura 135, a reta MR é mediatriz de FP , logo R é a projeção ortogonal de F sobre a tangente MQ . Além disso temos:

$$FR = PR \quad \text{e} \quad OF = OF'$$

logo, no triângulo FPF' , o segmento OR une os pontos médios de dois lados e é, portanto, igual à metade do terceiro, isto é:

$$OR = \frac{1}{2} F'P = \frac{1}{2} \times 2a = a.$$

Como a é o raio do círculo principal, conclui-se que R está na circunferência desse círculo.

10. Traçado de tangentes à elipse.

PRIMEIRO CASO: *Traçar a tangente por um ponto da curva.* De acordo com a primeira propriedade das tangentes, basta traçar a bissetriz externa do ângulo dos raios vetores do ponto dado (fig. 135).

OBSERVAÇÃO. Da construção resulta que só há uma tangente.

SEGUNDO CASO: *Traçar a tangente de um ponto exterior.* Seja o ponto P , exterior a elipse (fig. 136). A tangente procurada contém o ponto P e é mediatriz do segmento determinado pelo foco F' e seu simétrico F_1 (Primeira propriedade). Assim o problema estará resolvida se determinarmos o ponto F_1 , simétrico de F' em relação à tangente. Este ponto F_1 está no círculo diretor do outro foco (terceira consequência) e também na circunferência do círculo descrito de P com raio PF' ($PF' = PF_1$ em virtude da simetria). As duas circunferências têm os dois pontos de interseção F_1 e F'_1 . As tangentes procuradas são, portanto, as mediatrizes de $F'F_1$ e $F'F'_1$.

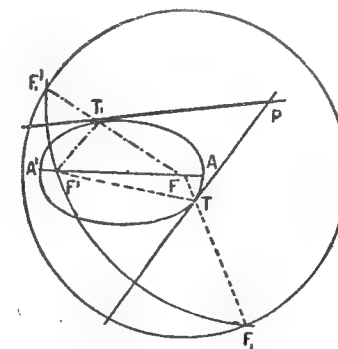


FIG. 136

O problema tem duas soluções que podem ser obtidas determinando primeiramente os pontos de contacto T e T_1 , que serão os pontos da elipse obtidos ligando o foco F aos simétricos de F' .

II) HIPÉRBOLE

11. Definições. HIPÉRBOLE é a curva plana tal que a diferença das distâncias, de cada um de seus pontos a dois pontos fixos de seu plano é constante.

Os dois pontos fixos, F e F' (fig. 137), são os focos.

A diferença constante representa-se por $2a$. Assim, para qualquer ponto M da hipérbole, devemos ter:

$$MF - MF' = 2a. \quad (1)$$

ou

$$MF' - MF = 2a. \quad (2)$$

Seja OP a mediatriz de FF' (fig. 137).

Nenhum ponto da hipérbole ficará sobre a mediatriz, pois os pontos desta reta são equidistantes dos focos. Dê-se modo, a curva tem dois ramos distintos sem pontos comuns, situados um de cada lado da mediatriz. Se MF é maior que MF' o ponto M está do mesmo lado de F' em relação à mediatriz (igualdade 1); se MF é menor que MF' , o ponto M está do mesmo lado de F , em relação à mediatriz (igualdade 2).

A hipérbole divide, portanto o plano em três regiões. Duas regiões que contêm, cada uma, um dos focos e denominam-se **interiores** e uma região que não contém nenhum dos focos, e denomina-se **exterior**.

As definições de **raios vetores**, **distância focal**, **círculos diretores**, **círculo principal** e **círculo auxiliar** são idênticas às da elipse.

A distância focal representa-se por $2c$, assim, temos:

$$FF' = 2c \text{ e } OF = OF' = c.$$

12. Condição de existência da curva. O triângulo MFF' (fig. 137) permite concluir:

$$FF' > MF - MF' \text{ ou } 2c > 2a,$$

donde resulta

$$c > a$$

Assim, para que a curva exista, a distância focal deve ser maior que a diferença constante dos raios vetores.

13. Traçado da hipérbole.

Primeiro processo: Construção por um movimento contínuo (fig. 138).

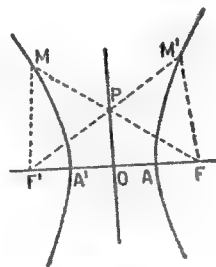


FIG. 137

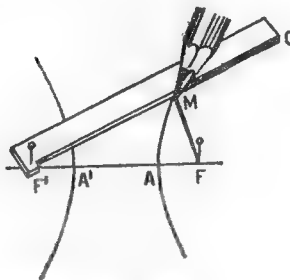


FIG. 138

Coloca-se a extremidade de uma régua no foco F' , de modo que a mesma possa girar em torno desse ponto. Toma-se um fio inextensível de comprimento igual ao da régua diminuído da constante $2a$ e fixa-se uma de suas extremidades no foco F e a outra na extremidade C da régua. Se mantivermos o fio esticado contra a régua por intermédio da ponta de um lápis e fizermos a régua girar em torno de F' , a ponta do lápis descreverá uma hipérbole, porque:

$$MF' = CF' - CM$$

$$MF = CF' - CM - 2a,$$

subtraindo, membro a membro:

$$MF' - MF = 2a.$$

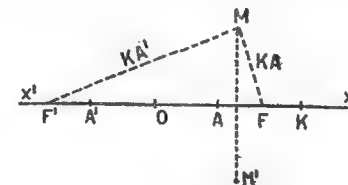


FIG. 139

Passando a extremidade fixa da régua para o foco F , obteremos o segundo ramo da curva.

Segundo processo: Construção por pontos.

Sejam F e F' os focos e $2a$ a diferença constante. (fig. 139) Tracemos FF' e, a partir do ponto médio do segmento FF' , tomemos

$$OA' = OA = a \quad (1)$$

A e A' SÃO DOIS PONTOS DA HIPÉRBOLE.

Realmente, para o ponto A temos:

$$AF' = OF' + OA = c + a$$

$$AF = OF - OA = c - a$$

Subtraindo: $AF' - AF = 2a$

Analogamente demonstraríamos que o ponto A' é da curva. De acordo com a construção a distância AA' é igual a $2a$.

Tomemos, sobre a reta dos focos, um ponto K , exterior ao segmento FF' . Com centro em F' tracemos o círculo de raio $A'K$ e, do mesmo modo, com centro em F e raio AK .

Estes dois círculos cortar-se-ão em M e M' que serão dois pontos da hipérbole, visto como:

$$MF' = A'K$$

$$MF = AK$$

donde, subtraindo $MF - MF' = A'K - AK = AA' = 2a$.

Fazendo variar a posição de K na semi-reta FX obteremos outros tantos pontos do primeiro ramo da curva. (fig. 139).

Se tomarmos o ponto K sobre a semi-reta $F'X'$, obteremos os pontos do segundo ramo.

14. O ponto em relação à hipérbole. A hipérbole como lugar geométrico.

Um ponto pode ocupar três posições em relação à hipérbole:

1.º O ponto está na curva. **Ponto aferente.** Seja o ponto M_1 (fig. 140). Neste caso, temos, por definição:

$$M_1F' - M_1F = 2a \quad (1)$$

2.º O ponto está na região exterior. **Ponto exterior.** Seja M_2 (fig. 140). Tracemos M_2F que corta a curva em P e liguemos P a F' . O triângulo M_2PF' dá:

$$M_2F' < PF' + M_2P,$$

$$\text{e, como: } M_2F = PF + M_2P,$$

conclui-se, subtraindo membro a membro:

$$M_2F' - M_2F < PF' - PF$$

$$\text{isto é } M_2F' - M_2F < 2a \quad (2)$$

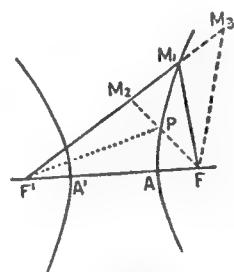


FIG. 140

3.º O ponto está na região interior. **Ponto interior.**

Seja M_3 (fig. 140). Tracemos M_3F' que corta a curva em M_1 .

$$\text{Temos: } M_3F' = M_3M_1 + M_1F'$$

$$\text{e, o triângulo } M_1M_3F \text{ dá: } M_3F < M_1M_3 + M_1F$$

$$\text{Subtraindo: } M_3F' - M_3F > M_1F' - M_1F,$$

isto é:

$$M_3F' - M_3F > 2a \quad (3)$$

Consequências:

1.º As relações (1), (2), e (3) excluem-se mutuamente, portanto, conclui-se:

A condição necessária e suficiente para que um ponto seja *aferente*, *exterior* ou *interior* à hipérbole é que a diferença entre suas distâncias aos focos seja *igual*, *menor* ou *maior* que a diferença $2a$ dos raios vetores.

2.º Os pontos que *não pertencem* à curva *não satisfazem* a condição da definição; logo, a curva é um *lugar geométrico* e pode ser definida:

A hipérbole é o lugar geométrico dos pontos de um plano, cuja diferença das distâncias a dois pontos fixos de seu plano é constante.

15. Eixos de simetria. Centro de simetria. Vértices.

1.º A linha dos focos, FF' , é um eixo de simetria, denominado *eixo real* ou *eixo transverso*, porque intercepta os dois ramos da hipérbole (fig. 137).

2.º A mediatriz OP do segmento focal FF' é um eixo de simetria denominado *eixo não transverso* porque não toca a hipérbole.

3.º O ponto O , de interseção dos eixos, é um centro de simetria.

As três proposições demonstram-se de modo idêntico às correspondentes da elipse.

Os pontos A e A' , de interseção do eixo transverso com a hipérbole denominam-se *vértices*.

16. Comprimento dos eixos. Hipérbole equilátera.

Comprimento do eixo transverso é o segmento AA' , determinado pelos vértices sobre o eixo e é portanto igual a $2a$.

Com centro em A e raio c (semidistância focal) tracemos um círculo que cortará o eixo não transverso em B e B' (fig. 141). O segmento BB' denomina-se, **comprimento** do eixo não transverso.

Quando os dois eixos têm comprimentos iguais ($b = a$) a hipérbole diz-se **equilátera**.

17. Relação métrica entre os eixos e a distância focal.

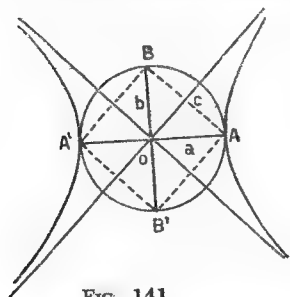


FIG. 141

No triângulo OAB (fig. 141), temos:

$$OA^2 + OB^2 = AB^2,$$

donde a relação entre a , b e c :

$$a^2 + b^2 = c^2 \quad (I)$$

Se a hipérbole for equilátera, resultará:

$$2a^2 = c^2 \quad \therefore \quad c = a\sqrt{2}$$

isto é a semi-distância focal é igual ao lado do quadrado inscrito no círculo principal.

18. Excentricidade. Variação.

Excentricidade é a razão $\frac{c}{a}$ entre a semidistância focal e o semi-eixo transverso. Representa-se pela letra e :

$$e = \frac{c}{a} \quad (II)$$

Substituindo c por seu valor (I), obtém-se:

$$e = \frac{\sqrt{a^2 + b^2}}{a},$$

valor da excentricidade em função dos eixos.

Variação da excentricidade. Como $c > a$ (condição de existência), temos:

$$e > 1.$$

Assim, a excentricidade varia de 1 a ∞ .

Para $c = a$, tem-se: $e = 1$. A hipérbole reduz-se às duas semi-retas do eixo transverso de origens F e F' , exteriores ao segmento focal.

Quando a tende para zero a excentricidade cresce indefinidamente, a hipérbole tenderá para o eixo não transverso.

No caso particular da hipérbole equilátera ($c = a\sqrt{2}$)

$$e = \frac{a\sqrt{2}}{a} = \sqrt{2}.$$

19. Propriedade da hipérbole.

Qualquer ponto da hipérbole é equidistante de um dos focos e da circunferência do círculo diretor do outro foco.

Hipótese: Seja M um ponto da hipérbole.

Tracemos o círculo diretor de centro F' (fig. 142).

A distância de M à circunferência será o segmento MP do suporte do raio.

Teremos a tese: $MP = MF$

Demonstração.

Por definição de círculo diretor teremos:

$$MP = MF' - 2a$$

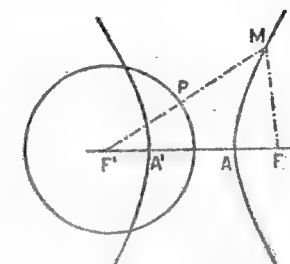


FIG. 142

e, por definição de hipérbole: $MF = MF' - 2a$.
 donde, resulta:

$$MP = MF$$

Recíproca.

Qualquer ponto equidistante de um dos focos e da circunferência do círculo diretor do outro foco, pertence à hipérbole.

Demonstração.

Se MP é a distância de um ponto M (fig. 142) à circunferência (F'), o suporte de MP contém o centro F' . Daí, resulta:

$$MF' - MP = 2a. \quad (2)$$

em virtude da hipótese, temos:

$$MP = MF$$

Substituindo em (1), vem:

$$MF' - MF = 2a.$$

e o ponto M é da hipérbole.

Conseqüências.

- 1.ª) A hipérbole é o lugar geométrico dos pontos do plano equidistantes de um dos focos e da circunferência do círculo diretor do outro foco.
- 2.ª) A hipérbole é o lugar geométrico dos centros dos círculos tangentes a uma circunferência dada e que passam por um ponto dado exterior à circunferência.

Realmente, o ponto dado é um dos focos e a circunferência dada é a do círculo diretor do outro foco.

APLICAÇÃO. Traçado da hipérbole por pontos, dados os focos e o comprimento do eixo transversal. Tracemos o suporte $F'P$ de um raio qualquer do círculo diretor (fig. 143). Liguemos a extremidade P do raio ao foco F e tracemos a mediatriz do segmento PF , seja MS .

A intersecção M da mediatriz com $F'P$ será da hipérbole em virtude da recíproca, pois $MP = MF$.

Fazendo variar as posições de $F'P$, teremos outros tantos pontos da hipérbole.

20. Tangentes à hipérbole. Primeira propriedade.

Em todo ponto da hipérbole existe uma tangente que é bissetriz do ângulo dos raios vetores desse ponto.

Demonstração.

De acôrdo com a construção da figura 143 a reta MQ , mediatriz de PF , tem um ponto M na hipérbole. Se os demais pontos dessa mediatriz forem exteriores, a reta MQ é tangente.

Consideremos, então, um ponto S qualquer da mediatriz e liguemo-lo aos pontos F, F' e P . O triângulo SPF' permite concluir:

$$SF' - SP < PF' \quad (1)$$

PF' é o raio do círculo diretor e SP é igual a SF , pois S está na mediatriz; logo, a desigualdade (1) pode ser escrita:

$$SF' - SF < 2a.$$

O ponto S é, portanto, exterior e a tangente existe.

Os triângulos MPQ e MQF são congruentes; logo:

$$\alpha = \alpha'$$

e a tangente é bissetriz do ângulo dos raios vetores MF e MF' .

Conseqüências.

- 1.ª) A normal à hipérbole é bissetriz externa do ângulo dos raios vetores do ponto de contacto.
- 2.ª) O simétrico de um foco em relação a uma tangente fica situado na circunferência do círculo diretor do outro foco.

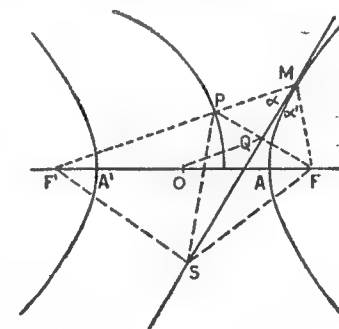


FIG. 143

- 3.ª) A tangente em um ponto da hipérbole é mediatriz do segmento que une um dos focos ao ponto da circunferência do círculo diretor do outro foco, situado no suporte do raio do ponto dado.

Segunda propriedade (La Hire).

A projeção ortogonal de qualquer dos focos sobre uma tangente à hipérbole fica situada no círculo principal.

Demonstração.

Na fig. 143, FQ é perpendicular à tangente MS ; logo, o ponto Q é projeção ortogonal de F sobre a tangente.

Além disso, temos:

$$QF = QP \text{ e } OF = OF';$$

logo, no triângulo FPF' , o segmento OQ une os pontos médios de dois lados, e portanto:

$$OQ = \frac{1}{2} \text{ de } PF' = \frac{1}{2} \text{ de } 2a = a.$$

Como a é o raio e O o centro do círculo principal, conclui-se estar o ponto Q na circunferência desse círculo.

21. Traçado de tangentes à hipérbole.

PRIMEIRO CASO. Traçar a tangente por um ponto da curva. De acordo com a primeira propriedade, basta traçar a bissetriz do ângulo dos raios vetores do ponto dado (reta MS , fig. 143).

Da construção resulta que só há uma tangente, pois a bissetriz é única.

SEGUNDO CASO. Traçar a tangente de um ponto exterior. Seja traçar a tangente do ponto exterior P (fig. 144).

Tracemos o círculo diretor F' e, ainda, o arco RG , do círculo de raio PF e centro no ponto dado P . Esses dois círculos se cortam em G e R .

As retas $F'G$ e $F'R$ cortam a hipérbole em D e Q .

As retas PQ e DP são mediatrizes de RF e GF ; logo são as tangentes pedidas.

A construção justifica-se como na elipse.

OBSERVAÇÃO. De um ponto exterior podem ser traçadas duas tangentes.

22. Assíntotas.

a) **Definição.** Dado um ramo de curva C com pontos do infinito, se existir uma reta D (fig. 145) tal que a distância MP de um ponto M da curva à reta D tenda para zero quando o ponto M se afasta indefinidamente sobre a curva, a reta D denomina-se ASSÍNTOTA à curva.

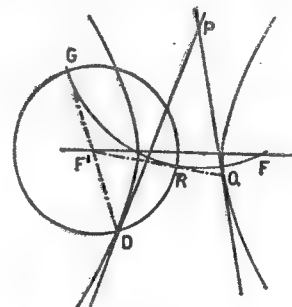


FIG. 144



FIG. 145

Assim, podemos dizer que assíntota é uma tangente à curva, cujo ponto de contacto foi regeitado para o infinito.

b) **Existência das assíntotas à hipérbole.** Traçado. A tangente à hipérbole num ponto M é mediatriz do segmento FF_1 (primeira propriedade, segunda e terceira consequência), sendo F_1 um ponto do círculo diretor de centro F' (fig. 146).

Se F_1 se desloca sobre o arco F_1F_2 , o ponto M de tangência será sempre, a intersecção do suporte do raio F_1F' do círculo diretor com a mediatriz do segmento FF_1 . Ora, na posição

FF_2 , tangente ao círculo diretor, o raio $F'F_2$ e a mediatriz PQ do segmento FF_2 ficam paralelas; logo o ponto de intersecção M , isto é o ponto de contacto fica regeitado para o infinito e PQ será uma assíntota.

Analogamente, para a segunda tangente FF_3 , traçada de F ao círculo diretor, teremos uma segunda assíntota $P'Q'$.

OBSERVAÇÃO. No triângulo $FF'F_1$ (fig. 146) a reta PQ passa no ponto médio do lado FF_1 e é paralela ao segundo lado $F'F_1$; logo, passará no ponto médio do terceiro lado FF' que é o centro O da hipérbole. Conclui-se:

As assíntotas cortam-se no centro da hipérbole.

23. Hipérboles conjugadas. Duas hipérboles são conjugadas quando o eixo transversal de uma é, em direção e comprimento, o eixo não transversal da outra e reciprocamente.

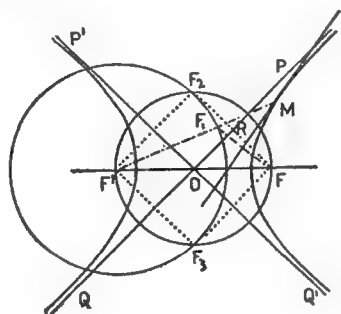


FIG. 146

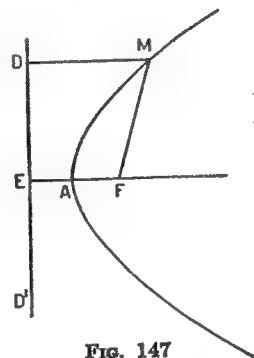


FIG. 147

Conclui-se dessa definição que *duas hipérboles conjugadas têm as mesmas assíntotas*.

III) PARÁBOLA

24. Definições. PARÁBOLA é a curva plana tal que cada um de seus pontos é equidistante de um ponto fixo e de uma reta fixa, situados em seu plano.

O ponto fixo denomina-se **foco** (fig. 147) e a reta fixa, **diretriz** (DD' fig. 147).

Assim, para que um ponto M pertença à parábola, devemos ter:

$$MF = MD.$$

A distância MF , de um ponto ao foco, denomina-se **RAIO VETOR** desse ponto.

Parâmetro é a distância EF , do foco à diretriz. Representa-se por p . Qualquer ponto da diretriz DD' ou à sua esquerda ficará mais próximo dessa reta que do foco; logo, a parábola tem **um único ramo** situado do mesmo lado do foco em relação à diretriz.

O ponto M pode afastar-se infinitamente sobre a curva mantendo-se iguais as distâncias MF e MD ; logo, a curva tem pontos no infinito e é uma **curva aberta**.

25. Traçado da parábola.

PRIMEIRO PROCESSO. Construção por um movimento contínuo. Apliquemos uma régua sobre a diretriz DD' . Tomemos um esquadro (fig. 148), cujo cateto menor BD apoiaremos sobre a régua, e um fio inextensível de comprimento igual ao cateto maior CD . Fixemos uma das extremidades desse fio no foco F e a outra na extremidade C do cateto maior.

Se mantivermos o fio esticado por intermédio da ponta M de um lápis e fizermos o esquadro deslizar sobre a régua, o ponto M descreverá o ramo AM de parábola, pois, para qualquer posição teremos:

$$CM + MD = CM + MF;$$

e, portanto: $MD = MF$.

Repetindo a operação pela parte inferior da régua obteremos o ramo AM' .

SEGUNDO PROCESSO. Construção por pontos. Seja F o foco e DD' a diretriz. Tracemos de F a perpendicular à diretriz, seja EF (fig. 149).

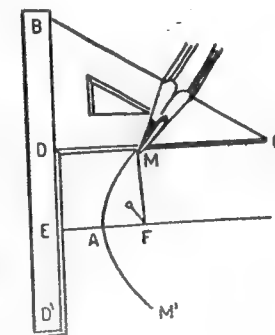


FIG. 148

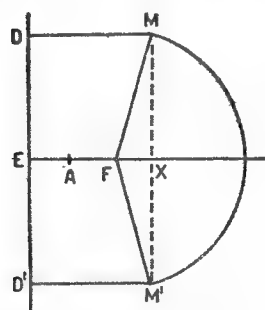


FIG. 149

O ponto médio A de EF pertence à parábola porque:

$$AE = AF.$$

Sobre EF e na semi-reta AF , tomemos um ponto arbitrário X e, por esse ponto, conduzamos a paralela MM' à diretriz.

Finalmente, tracemos, com centro em F e raio EX , o arco MM' interceptando a paralela em M e M' que são dois pontos da parábola, porque:

$$MF = EX = MD \quad \text{e} \quad M'F = EX = M'D'$$

Deslocando o ponto X sobre a semi-reta AX , obteremos outros tantos pontos da parábola.

26. A parábola como lugar geométrico. O ponto em relação à parábola. Um ponto do plano pode ocupar três posições em relação à parábola.

1.ª) *O ponto está na curva. Ponto aferente.* Seja M_1 (fig. 150). Neste caso, temos:

$$M_1F = M_1D, \quad (1)$$

por definição.

2.ª) *O ponto está na região exterior. Ponto exterior.*

Seja M_2 (fig. 150). Tracemos M_2F .

O triângulo M_1M_2F permite concluir:

$$M_2F + M_2M_1 > M_1F$$

ou, por ser M_1 da parábola:

$$M_2F + M_2M_1 > M_1D \quad \therefore \quad M_2F > M_1D - M_2M_1;$$

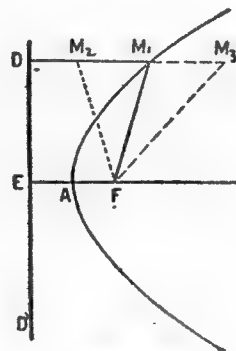


FIG. 150

finalmente, efetuando a subtração:

$$M_2F > M_2D \quad (2)$$

3.ª) *O ponto está na região interior. Ponto interior.*

Seja M_3 (fig. 150). Tracemos M_3F . Teremos, no triângulo M_1M_3F

$$M_3F < M_3M_1 + M_1F$$

e, por definição: $M_1F = M_1D$

$$\text{logo:} \quad M_3F < M_3M_1 + M_1D$$

ou, efetuando a adição:

$$M_3F < M_3D. \quad (3)$$

Conseqüências.

1.ª) As relações (1), (2) e (3) excluem-se mutuamente, portanto, conclui-se:

A condição necessária e suficiente para que um ponto seja *aferente*, *exterior* ou *interior* à parábola, é que sua distância ao foco seja *igual*, *maior* ou *menor* que sua distância à diretriz.

2.ª) Os pontos que *não pertencem* à curva, *não satisfazem* à condição da definição; logo, a parábola é o LUGAR GEOMÉTRICO DOS PONTOS DE UM PLANO EQUIDISTANTES DE UM PONTO FIXO (FOCO) E DE UMA RETA FIXA (diretriz) DO MESMO PLANO.

27. Eixo de simetria. Vértice. A construção da parábola por pontos (fig. 149) fornece, para cada arco, dois pontos M e M' , simétricos em relação a EF . Logo, a reta EF é um EIXO DE SIMETRIA da parábola.

VÉRTICE da parábola é o ponto A em que o eixo corta a curva.

OBSERVAÇÕES.

- 1.ª) A parábola tem um único eixo de simetria e não tem centro.
- 2.ª) Não há relação métrica entre eixos, visto como só há um eixo que não tem comprimento.

28. Tangentes à parábola. PRIMEIRA PROPRIEDADE.

Existência.

Em todo ponto da parábola existe uma tangente que é bissetriz do ângulo do raio vetor com a perpendicular traçada do ponto à diretriz.

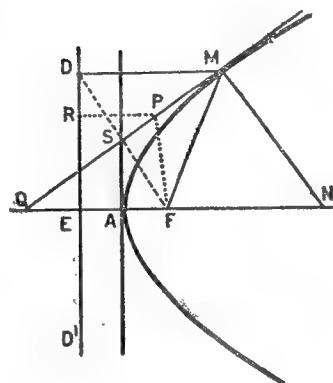


FIG. 151

O triângulo DMF é isósceles por definição de parábola; logo, a bissetriz interna MQ é mediatriz de DF . Assim, temos:

$$DP = PF,$$

e, como
conclui-se:

$$PR < DP,$$

$$PR < PF.$$

Assim, o ponto P é exterior e MQ é tangente.

Conseqüências.

- 1.ª) A normal à parábola (MN , fig. 151) é bissetriz externa do ângulo DMF , do raio vetor do ponto de contacto com a perpendicular à diretriz.
- 2.ª) A tangente em um ponto da curva é mediatriz do segmento traçado do foco ao pé da perpendicular do ponto à diretriz (DF , fig. 151).

- 3.ª) O ponto D da diretriz é simétrico do foco em relação à tangente e conclui-se: o lugar geométrico dos simétricos do foco em relação às tangentes é a diretriz.

- 4.ª) A tangente no vértice A é perpendicular ao eixo (fig. 151), porque deve ser bissetriz do ângulo raso FAE .

SEGUNDA PROPRIEDADE.

A projeção ortogonal do foco sobre uma tangente fica situada na tangente ao vértice.

Demonstração.

Os pontos D e F são simétricos em relação à tangente MQ (fig. 151); logo, o ponto médio S de DF é projeção ortogonal de F sobre a tangente.

No triângulo DEF , a reta AS é paralela ao lado DE e passa no ponto médio de EF ; logo passará no ponto médio do lado DF , isto é, no ponto S . Assim, a projeção do foco sobre a tangente MQ fica situada na tangente ao vértice.

29. Traçado de tangentes à parábola.

PRIMEIRO CASO. Traçar a tangente por um ponto da curva. De acordo com a primeira propriedade basta traçar a bissetriz do ângulo formado pelo raio vetor do ponto dado com a perpendicular traçada desse ponto à diretriz (fig. 151). A bissetriz é única e, portanto, só há uma tangente.

SEGUNDO CASO. Traçar a tangente de um ponto exterior. Seja o ponto exterior P (fig. 152).

O simétrico do foco em relação à tangente procurada está na diretriz.

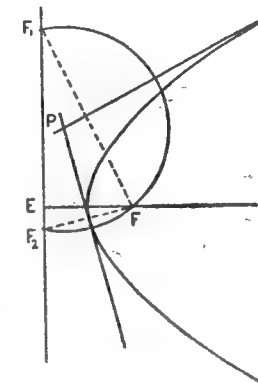


FIG. 152

Seja F_1 . O ponto P da tangente é equidistante de F e F_1 ; logo, F_1 está no círculo de centro P e raio PF .

Este círculo corta a diretriz em F_1 e F_2 .

As tangentes procuradas são, pois, as mediatrizes de FF_1 e de FF_2 .

Do ponto exterior podem ser traçadas DUAS tangentes.

IV) SECÇÕES CÔNICAS

(Curso Científico)

30. Definição.

Chamam-se SECÇÕES CÔNICAS, ou apenas CÔNICAS, as curvas que podem ser obtidas cortando-se uma superfície cônica de revolução por um plano.

Se o plano da secção é paralelo ao da base (ou perpendicular ao eixo), a secção é um **círculo** (pág. 212 n.º 2).

Comumente são consideradas apenas as três secções cônicas; elipse, hipérbole e parábola, obtidas por um plano secante, oblíquo ao eixo.

O matemático DANDELIN fixou as condições em que a secção produz cada um dos tipos de curva por intermédio de um teorema, conhecido com o seu nome.

31. Teorema de Dandelin.

A secção de uma superfície cônica de revolução por um plano oblíquo ao eixo é uma elipse, uma hipérbole ou uma parábola.

1.º) A secção é uma elipse quando o plano corta todas as geratrizes de uma mesma folha (fig. 153).

Demonstração.

Seja APA' a curva da secção.

O plano meridiano perpendicular ao plano da secção corta a superfície cônica segundo as geratrizes SB e SC , e o plano secante segundo a reta AA' .

Tracemos o círculo O , inscrito no triângulo SAA' e o círculo O' , ex-inscrito no mesmo triângulo e cujos centros O e O' ficam sobre a bissetriz SO' do ângulo BSC .

Se imprimirmos uma rotação em torno do eixo SO' , mantendo fixo o plano secante AA' , os círculos O e O' gerarão duas esferas inscritas na superfície cônica gerada por SB . Os círculos de contacto serão DNH e $BN'C$. As esferas geradas serão tangentes ao plano da secção nos pontos F e F' .

Consideremos um ponto qualquer P da curva APA' e tracemos a geratriz SP dêsse ponto; sejam N e N' os pontos em que essa geratriz tangencia os círculos DH e BC .

PF e PN são tangentes à esfera O , traçadas do mesmo ponto; logo, temos:

$$PF = PN$$

Analogamente teremos, em relação à esfera O' :

$$PF' = PN'$$

Somando, membro a membro:

$$PF + PF' = NN' \quad (1)$$

NN' tem valor constante qualquer que seja o ponto P , pois as geratrizes do tronco de cone são iguais; logo a curva é uma elipse de focos F e F' .

A constante NN' é igual ao eixo AA' . Realmente, pela propriedade das tangentes temos:

$$BD = AD + AB = AF + AF' = 2AF + FF'$$

$$HC = A'H + A'C = A'F + A'F' = 2A'F' + FF'$$

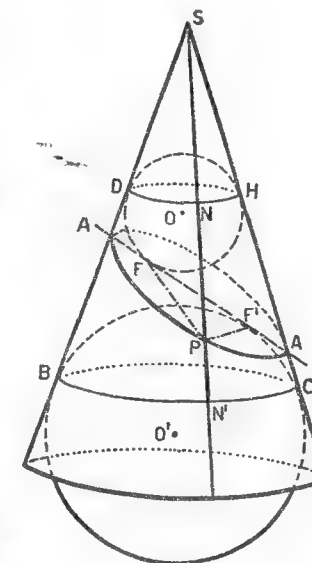


FIG. 153

Como BD e HC são iguais (geratrizes do tronco), vem:

$$AF = A'F'$$

e, portanto:

$$NN' = BD = AF + FF' + A'F' = AA'$$

2.º) *A secção é uma hipérbole quando o plano secante corta as duas folhas da superfície cônica.*

Demonstração.

Seja PAM a curva de intersecção do plano secante com a folha inferior da superfície cônica e $P'A'M'$ com a folha superior.

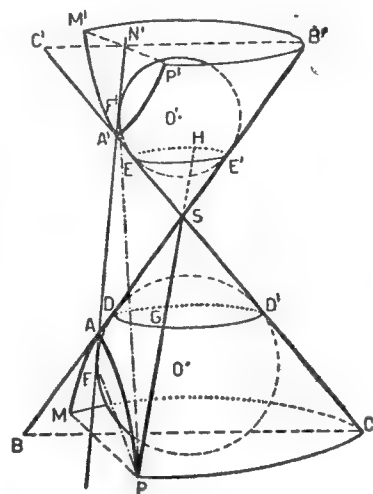


FIG. 154

Seja P um ponto da curva. Tracemos PF , PF' e a geratriz PS que tangencia as esferas em G e H .

Como duas tangentes traçadas do mesmo ponto são iguais temos

$$PF' = PH$$

$$PF = PG$$

O plano meridiano perpendicular ao plano da secção corta a superfície cônica segundo as geratrizes BB' e CC' e o plano secante segundo a reta NN' .

Tracemos os círculos tangentes às geratrizes BB' e CC' e, à reta NN' , e cujos centros são O e O' .

Girando a figura em torno do eixo OO' , mantido fixo o plano secante, BB' gerará a superfície cônica e os dois círculos gerarão as esferas O e O' tangentes à superfície cônica segundo os círculos de contacto DD' e EE' e ao plano secante nos pontos F e F' .

Subtraindo, membro e membro, vem:

$$PF' - PF = PH - PG = GH.$$

Como GH é constantes qualquer que seja o ponto P , pois as geratrizes do tronco de cone de segunda espécie são iguais, conclui-se que a curva é uma hipérbole de focos F e F' .

Como no caso da elipse podemos provar que a constante é igual a AA' .

3.º) *A secção é uma parábola quando o plano secante é paralelo a uma geratriz da superfície cônica.*

Demonstração.

Seja PAP' a secção produzida pelo plano paralelo à geratriz SB (fig. 155).

Consideremos o ponto qualquer P da secção e tracemos o paralelo BPC .

Tracemos, ainda, o meridiano BSC , perpendicular ao plano secante sendo IN a intersecção e o círculo O , tangente às retas SB , SC e IN . Sejam E , F e G os pontos de contacto.

Giremos a figura em torno do eixo SO , mantendo fixo o plano secante. O círculo O gerará uma esfera tangente à superfície cônica e ao plano da secção. O paralelo EG é o círculo de contacto com a superfície cônica e F , o ponto de contacto com o plano da secção.

A intersecção do plano secante com o do paralelo EG é a reta DD' . Como o plano meridiano BSC é perpendicular a estes dois planos, será perpendicular à intersecção DD' ; logo temos: $IN \perp DD'$.

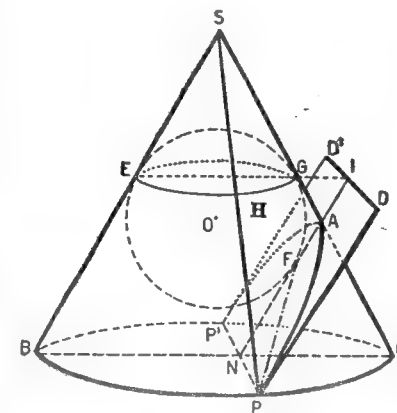


FIG. 155

PP' e DD' são paralelas (intersecções dos paralelos com o plano secante); conclui-se que NI é igual à distância DP do ponto P à reta DD' .

O quadrilátero $BEIN$ é paralelogramo e como as geratrizes do tronco de cone são iguais, teremos:

$$PH = BE = IN = DP \quad (1).$$

Por outro lado, PF e PH são tangentes à esfera; daí decorre:

$$PF = PH,$$

e, portanto, em virtude de (1):

$$PF = DP$$

Qualquer ponto P da curva PAP' , é, pois, equidistante ponto fixo F e da reta fixa DD' e a curva é uma parábola.

EXERCÍCIOS

- Os eixos de uma elipse medem, respectivamente, 26 cm e 24 cm. Calcular a excentricidade. *Resp.*: 5/13.
- A excentricidade de uma elipse é 4/5 e o eixo maior tem 20 cm. Calcular o eixo menor e a distância focal. *Resp.*: 12 cm e 16 cm.
- A excentricidade de uma elipse é 3/5 e o eixo menor tem 24 cm. Calcular o eixo maior e a distância focal. *Resp.*: 30 cm e 18 cm.
- Achar os eixos de uma hipérbole, cuja distância focal mede 26 cm e a excentricidade $\frac{13}{5}$. *Resp.*: 10 cm e 24 cm.
- O eixo transversal de uma hipérbole mede 3,2 cm e a excentricidade é 17/8. Calcular a distância focal e o eixo não transversal. *Resp.*: 6,8 cm e 6 cm.
- Numa elipse a distância focal é de 12 cm e a corda focal perpendicular ao eixo maior mede 12,8 cm. Calcular os eixos e a excentricidade. *Resp.*: 20 cm, 16 cm, 3/5.
- Um ponto M de uma elipse fica situado a 1,6 cm do foco que lhe é mais próximo e a 1,7 cm do centro. Calcular os eixos, sabendo que a distância focal tem 3,4 cm. *Resp.*: 4,6 cm e 3,08 cm.
- Um cilindro circular reto, cujo diâmetro da base é $d = 6$ cm, é seccionado por um plano que determina uma elipse de excentricidade $e = 4/5$. Calcular os eixos da elipse. (E. Técnica do Exército, 1951). *Resp.*: 10 cm e 6 cm.

- Um cone de 30 cm de raio e 15 cm de altura é cortado por um plano não paralelo à base, que intercepta a altura a 4 cm do vértice. A secção do plano na superfície cônica é uma elipse de excentricidade igual a 3/5. Calcular os eixos da elipse e a distância focal. *Resp.*: 20 cm, 16 cm e 12 cm.
- Demonstrar que o círculo que tem por diâmetro o raio vetor FM de um ponto qualquer de uma hipérbole é tangente ao círculo principal. (E. Eng. U. Minas Gerais, 1951).
- Os raios vetores traçados do vértice B de uma elipse são perpendiculares. Calcular a excentricidade. *Resp.*: $\frac{\sqrt{2}}{2}$.
- Um dos focos de uma elipse divide o eixo maior em dois segmentos de 2 cm e 18 cm. Achar a excentricidade da elipse. *Resp.*: 4/5.
- Os raios vetores de um dos vértices de uma hipérbole medem, respectivamente, 8 cm e 18 cm. Calcular os eixos. *Resp.*: 24 cm e 10 cm.
- O semi-eixo menor de uma elipse é média proporcional entre as distâncias dos focos a uma tangente qualquer. Provar.
- Numa hipérbole equilátera os raios vetores de um ponto M medem, respectivamente 10 cm e 6 cm. Calcular os eixos e a distância focal. *Resp.*: 4 cm e $4\sqrt{2}$ cm.
- Os eixos de uma elipse medem respectivamente 26 cm e 24 cm. Calcular os raios vetores de um ponto, cuja distância ao centro é igual $4\sqrt{10}$ cm. *Resp.*: 17 cm e 9 cm.

Questões de Concurso:

- Hipérbole é, por definição, ----- (E. P. U. C. — Rio, 1958).
- Numa elipse os eixos medem 5 m e 4 m. Calcule o eixo menor de uma segunda elipse, cuja excentricidade seja metade da excentricidade da primeira e cujo eixo maior coincida com o eixo menor da primeira. (E. P. U. C. — Rio, 1958).
- Numa hipérbole o eixo transversal mede 12 dm e o eixo não transversal mede 16 dm. Calcule o eixo não transversal de uma outra hipérbole, cuja excentricidade é o triplo da excentricidade da primeira e cujo eixo transversal é o não transversal da primeira. (E.E.U. Rio — 1961). *Resp.*: 36,8.
- Calcule a excentricidade da elipse que se obtém seccionando-se um cilindro de revolução de raio R por um plano que forme um ângulo α com o eixo do cilindro. (E.F.E. — 1957). *Resp.*: $\cos \alpha$.

REVISÃO GERAL

Questões de Concursos de 1961 a 1963

1. Resolva a equação $\log(x+1) + 2 = \log(4x^2 - 500)$ (E.N.E. — 61).
2. Calcule quatro números em progressão geométrica, sabendo que a diferença entre os extremos é 24,5 e que a diferença dos dois primeiros é 3,5. (E.P.U.C. — Rio, 63).
3. O logaritmo do número $n > 0$, na base 3, é, por definição, (E.P.U.C. — Rio, 63).
4. Sendo $\log = 3,32\ 783$, calcule $\log \sqrt[3]{a \cdot 10^{-2}}$. (E.O.U.C. — Rio, 63).
5. Resolva a equação $3^{2 \times -3} + 3^{2 \times -1} + 3^{2 \times +1} + 3^{2 \times +3} = \frac{820}{27}$ (E.P.U.C. — Rio, 63).
6. Se a, b e c são três termos consecutivos de uma progressão aritmética, o termo b é igual a (E.N.E. — 61).
7. Quando se inserem k termos em progressão geométrica entre dois números positivos a e b , a razão da progressão assim formada é (E.N.E. — 62).
8. Sendo c a característica do logaritmo decimal de N , a característica do logaritmo decimal de $1/N$ é igual a (E.N.E. — 62).
9. Calcule o logaritmo de $9/16$ no sistema de base $2/3$. (E.N.E. — 62).
10. Calcule o maior valor possível que pode ter a razão de uma progressão aritmética que admita os três números 32, 227 e 942 como termos da progressão. (E.N.E. — 62).
11. O primeiro termo de uma progressão geométrica decrescente e ilimitada é 8 e o limite da soma de seus termos é $40/3$. Calcule o 4.º termo da progressão. (E.N.E. — 62).
12. Sabendo que $\log 3 = 0,47\ 712$, $\log 63 = 1,79934$ e sendo $N = \left(\frac{0,049}{2,7}\right)^{\frac{87}{31}}$ calcule $\log N$, sem o emprêgo da tábua, e diga entre que potências de 10 está compreendido o número N . (E.N.E. — 62).
13. A soma de três números que formam uma progressão geométrica é 19. Calcule esses números sabendo que se subtrairmos 1 do primeiro, eles passam a constituir uma progressão aritmética. (E. Eng. GB — 61).
14. Para se obter a perpendicular comum a duas retas r e r' não coplanares procede-se do seguinte modo (E.P.U.C. — Rio, 63).
15. A condição necessária e suficiente para que a projeção ortogonal de um ângulo reto sobre um plano seja também um ângulo reto é (E.P.U.C. — Rio, 63).
16. Um poliedro convexo é regular quando (E.P.U.C. — Rio, 63).

17. A área da base de uma pirâmide quadrangular regular é igual a 64m^2 . A altura da pirâmide é igual a uma das diagonais da base. Calcule a área lateral do sólido. (E.P.U.C. — Rio, 63).
18. Em um triângulo isósceles cuja base mede 2cm e a altura correspondente 3cm, inscreve-se um quadrado que tem um dos lados sobre a base do triângulo. Calcule o volume gerado pela rotação desse quadrado em torno daquela altura do triângulo. (E.P.U.C. — Rio, 63).
19. Duas faces de um tetraedro são triângulos retângulos e isósceles sendo a aresta comum um cateto que mede 3cm. Estas faces formam um ângulo de 60° . Calcule a área total e o volume do tetraedro. (E.P.U.C. — Rio, 63).
20. Calcule a excentricidade da elipse de área $6\pi\text{cm}^2$ e de distância focal $2\sqrt{5}\text{cm}$. (E.P.U.C. — Rio, 63).
21. O hexágono regular $ABCDEF$ e o triângulo ACE executam uma rotação completa em torno da diagonal AD do hexágono. Calcule a razão dos volumes dos sólidos gerados pelos dois polígonos. (E.P.U.C. — Rio, 63).
22. Dois troncos de cone de revolução possuem uma única geratriz comum. As bases menores dos dois troncos têm 3cm de raio e estão situadas em planos perpendiculares. As bases maiores têm 4cm e 5cm de raio, respectivamente. Calcule a medida da geratriz comum. (E.P.U.C. — Rio, 63).
23. O ângulo de duas retas não coplanares é o ângulo formado. (F.E. GB — 61).
24. Distância entre duas retas não coplanares é, por definição. (E.N.E. — 61).
25. O poliedro regular no qual o ângulo interno de qualquer de suas faces é o maior possível é o. (E.F. GB — 61).
26. Calcule a área total de um paralelepípedo retângulo cuja diagonal mede $\sqrt{38}\text{cm}$, sabendo que a soma de todas as arestas mede 40cm (E.N.E. — 61).
27. Calcule o volume do cilindro equilátero circunscrito a uma esfera, sabendo que o cilindro equilátero inscrito na mesma esfera tem 100m^3 de volume. (E.N.E. — 61).
28. Numa pirâmide triangular regular de 3cm^3 de volume, as faces laterais formam com a base ângulos de 60° . Calcule a área lateral dessa pirâmide.
29. Ligam-se, por segmentos de reta, os centros das faces adjacentes de um cubo. Calcule, em função da aresta a do cubo, o volume do novo sólido formado. (E.N.E. — 62).
30. Um cilindro de revolução tem raio R e altura $2R$. No seu interior constroem-se dois cones, cada um tendo por vértice o centro de

uma das bases do cilindro e por base a base oposta do cilindro. Calcule a porção do volume do cilindro exterior aos dois cones. (E.N.E.) — 62).

RESPOSTAS:

- | | | |
|---|-----------------------------|---|
| 1. 30 | 2. 28, 14, 7 e 3,5 | 3. O expoente a que se deve elevar 3 para obter n . |
| 4. $2,44\ 261$ | 5. $x = 0$ | 6. $\frac{a+c}{2}$ |
| | | 7. $\frac{k+1}{\sqrt{a/b}}$ |
| 8. $-c + 1$ | 9. 1,41 904 | 10. 65 |
| | | 11. $\frac{64}{125}$ |
| 12. $5,11351$ | 13. 9, 6 e 4 | 14. Veja pág. 108, § 22. |
| 15. O plano do ângulo seja paralelo ao de projeção. | | |
| 16. Veja pág. 123, § 2. | 17. 192m^2 | 18. $0,432\pi\text{cm}^3$. |
| 19. $V = 9\sqrt{3}/24\text{cm}^3$ | 20. $\sqrt{5/3}$ | 21. $3/8$ |
| 22. $\sqrt{5}\text{cm}$ | 23. Veja pág. 91, § 10 | 24. Veja pág. 108, § 22. |
| 25. Dodecaedro $26,62\text{cm}^2$ | 27. $200\sqrt{2}\text{m}^3$ | 28. $6\sqrt{3}\text{cm}^2$ |
| | 29. $a^3/6$ | 30. $\frac{5}{6}\pi R^3$. |

1963

Obra executada nas oficinas da

SÃO PAULO EDITORA S. A.

São Paulo 6, SP — Brasil